INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIADS

IMO 50年

2005～2009

第10卷

主 编 佩 捷

副主编 冯贝叶

多解 推广 加强

$\sum_{1}^{5} k x_k = a$

$\sum_{1}^{5} k^3 x_k = a^2$

$\sum_{1}^{5} k^5 x_k = a^3$



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

由黑龙江省精品图书出版工程专项资金资助出版

国际数学奥林匹克竞赛系列

- IMO 50年.第1卷（1959~1963）
- IMO 50年.第2卷（1964~1968）
- IMO 50年.第3卷（1969~1973）
- IMO 50年.第4卷（1974~1978）
- IMO 50年.第5卷（1979~1984）
- IMO 50年.第6卷（1985~1989）
- IMO 50年.第7卷（1990~1994）
- IMO 50年.第8卷（1995~1999）
- IMO 50年.第9卷（2000~2004）
- IMO 50年.第10卷（2005~2009）

$\sum_{i=0}^{386}$ 刘培杰数学工作室

培杰数学国际文化传播中心
www.impj.cn
刘培杰数学工作室网站
http://lpj.hit.edu.cn

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 穆 青
封面设计 孙茵艾




哈尔滨工业大学出版社 **刘培杰数学工作室**
联系地址：哈尔滨市南岗区复华四道街10号
邮　　编：150006
联系电话：0451-86281378 13904613167
E-mail：lpj1378@163.com
微　　信：impjpp

上架建议：奥数类


ISBN 978-7-5603-5780-5
9 787560 357805
定价 48.00 元

INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIADS

IMO 50年

2005～2009 第10卷

● 佩捷　主编

多解　推广　加强



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书汇集了第46届至第50届国际数学奥林匹克竞赛试题及解答.该书广泛搜集了每道试题的多种解法,且注重初等数学与高等数学的联系,更有出自数学名家之手的推广与加强.本书可归结出以下四个特点,即收集全、解法多、观点高、结论强.

本书适合于数学奥林匹克竞赛选手和教练员、高等院校相关专业研究人员及数学爱好者使用.

图书在版编目(CIP)数据

IMO 50年.第10卷,2005~2009/佩捷主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.1

ISBN 978-7-5603-5780-5

Ⅰ.①I… Ⅱ.①佩… Ⅲ.①中学数学课-题解 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第003390号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 穆 青
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张21.25 字数514千字
版　　次 2016年1月第1版 2016年1月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-5780-5
定　　价 48.00元

前言 | Foreword

法国教师于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯在与法国科学家、教育家阿尔贝·雅卡尔的交谈中表明了这样一种观点："若一个人不'精通数学',他就比别人笨吗?"

"数学是最容易理解的.除非有严重的精神疾病,不然的话,大家都应该是'精通数学'的.可是,由于大概只有心理学家才可能解释清楚的原因,某些年轻人认定自己数学不行.我认为其中主要的责任在于教授数学的方式."

"我们自然不可能对任何东西都感兴趣,但数学更是一种思维的锻炼,不进行这项锻炼是很可惜的.不过,对诗歌或哲学,我们似乎也可以说同样的话."

"不管怎样,根据学生数学上的能力来选拔'优等生'的不当做法对数学这门学科的教授是非常有害的."(阿尔贝·雅卡尔、于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯.《献给非哲学家的小哲学》.周冉,译.广西师范大学出版社,2001:96)

这本题集不是为老师选拔"优等生"而准备的,而是为那些对 IMO 感兴趣,对近年来中国数学工作者在 IMO 研究中所取得的成果感兴趣的读者准备的资料库.展示原味真题,提供海量解法(最多一题提供 20 余种不同解法,如第 3 届 IMO 第 2 题),给出加强形式,尽显推广空间,是我国建国以来有关 IMO 试题方面规模最大、收集最全的一本题集.从现在看,以"观止"称之并不为过.

前中国国家射击队的总教练张恒是用“系统论”研究射击训练的专家，他曾说：“世界上的很多新东西，其实不是‘全新’的，就像美国的航天飞机，总共用了 2 万个已有的专利技术，真正的创造是它在总体设计上的新意.”（胡廷楣.《境界——关于围棋文化的思考》.上海人民出版社，1999:463）本书的编写又何尝不是如此呢，将近 100 位专家学者给出的多种不同解答放到一起也是一种创造.

如果说这部题集可比作一条美丽的珍珠项链的话，那么编者所做的不过是将那些藏于深海的珍珠打捞起来并穿附在一条红线之上，形式归于红线，价值归于珍珠.

首先要感谢江仁俊先生，他可能是国内最早编写国际数学奥林匹克题解的先行者（1979 年，笔者初中毕业，同学姜三勇（现为哈工大教授）作为临别纪念送给笔者的一本书就是江仁俊先生编的《国际中学生数学竞赛题解》（定价仅 0.29 元），并用当时叶剑英元帅的诗词做赠言：“科学有险阻，苦战能过关.”27 年过去仍记忆犹新）. 所以特引用了江先生的一些解法. 江苏师范学院（今年刚刚去世的华东师范大学的肖刚教授曾在该校外语专业就读过）是我国最早介入 IMO 的高校之一，毛振璇、唐起汉、唐复苏三位老先生亲自主持从德文及俄文翻译 1～20 届题解. 令人惊奇的是，我们发现当时的插图绘制者居然是我国的微分动力学专家“文化大革命”后北大的第一位博士张筑生教授，可惜天妒英才，张筑生教授英年早逝，令人扼腕（山东大学的杜锡录教授同样令人惋惜，他也是当年数学奥林匹克研究的主力之一）. 本书的插图中有几幅就是出自张筑生教授之手[22]. 另外中国科技大学是那时数学奥林匹克研究的重镇，可以说 20 世纪 80 年代初中国科技大学之于现代数学竞赛的研究就像哥廷根 20 世纪初之于现代数学的研究. 常庚哲教授、单墫教授、苏淳教授、李尚志教授、余红兵教授、严镇军教授当年都是数学奥林匹克研究领域的旗帜性人物. 本书中许多好的解法均出自他们[4,13,19,20,50]. 目前许多题解中给出的解法中规中矩，语言四平八稳，大有八股遗风，仿佛出自机器一般，而这几位专家的解答各有特色，颇具个性. 记得早些年笔者看过一篇报道说常庚哲先生当年去南京特招单墫与李克正去中国科技大学读研究生，考试时由于单墫基础扎实，毕业后一直在南京女子中学任教，所以按部就班，从前往后答，而李克正当时是南京市的一名工人，自学成才，答题是从后往前答，先答最难的一题，风格迥然不同，所给出的奥数题解也是个性化十足. 另外，现在流行的IMO题

解，历经多人之手已变成了雕刻后的最佳形式，用于展示很好，但用于教学或自学却不适合.有许多学生问这么巧妙的技巧是怎么想到的，我怎么想不到，容易产生挫败感，就像数学史家评价高斯一样，说他每次都是将脚手架拆去之后再将他建筑的宏伟大厦展示给其他人.使人觉得突兀，景仰之后，备受挫折.高斯这种追求完美的做法大大延误了数学的发展，使人们很难跟上他的脚步，这一点从潘承彪教授、沈永欢教授合译的《算术探讨》中可见一斑.所以我们提倡，讲思路，讲想法，表现思考过程，甚至绕点弯子，都是好的，因为它自然，贴近读者.

中国数学竞赛活动的开展、普及与中国革命的农村包围城市，星星之火可以燎原的方式迥然不同，是先在中心城市取得成功后再向全国蔓延.而这种方式全赖强势人物推进，从华罗庚先生到王寿仁先生再到裘宗沪先生，以他们的威望与影响振臂一呼，应者云集，数学奥林匹克在中国终成燎原之势.他们主持编写的参考书在业内被奉为圭臬，我们必须以此为标准，所以引用会时有发生，在此表示感谢.

中国数学奥林匹克能在世界上有今天的地位，各大学的名家们起了重要的理论支持作用.北京大学的王杰教授、复旦大学的舒五昌教授、首都师范大学的梅向明教授、华东师范大学的熊斌教授、中国科学院的许以超研究员、南开大学的李成章教授、合肥工业大学的苏化明教授、杭州师范学院的赵小云教授、陕西师范大学的罗增儒教授等，他们的文章所表现的高瞻周览、探赜索隐的识力，已达到炉火纯青的地步，堪称为中国 IMO 研究的标志.如果说多样性是生物赖以生存的法则，那么百花齐放，则是数学竞赛赖以发展的基础.我们既希望看到像格罗登迪克那样为解决一批具体问题而建造大型联合机械式的宏大构思型解法，也盼望有像爱尔特希那样运用最少的工具以娴熟的技能做庖丁解牛式剖析型解法出现.为此本书广为引证，也向各位提供原创解法的专家学者致以谢意.

编者为图“文无遗珠”的效果，大量参考了多家书刊杂志中发表的解法，也向他们表示谢意.

特别要感谢湖南理工大学的周持中教授、长沙铁道学院的肖果能教授、广州大学的吴伟朝教授以及顾可敬先生.他们四位的长篇推广文章读之，使笔者不能不三叹而三致意，收入本书使之增色不少.

最后要说的是由于编者先天不备，后天不足，斗胆尝试，徒见笑于方家.

哲学家休谟在写自传的时候,曾有一句话讲得颇好:"一个人写自己的生平时,如果说得太多,总是免不了虚荣的."这句话同样也适合于本书的前言,写多了难免自夸,就此打住是明智之举.

刘培杰
2014 年 10 月

目录 Contest

附录　IMO 背景介绍

参考文献

后记

第一编
第 46 届国际数学奥林匹克

第 46 届国际数学奥林匹克题解

墨西哥,2005

1 在正 $\triangle ABC$ 的三边上依下列方式选取 6 个点:在边 BC 上选点 A_1,A_2,在边 CA 上选点 B_1,B_2,在边 AB 上选点 C_1,C_2,使得凸六边形 $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ 的边长都相等.证明:直线 A_1B_2,B_1C_2,C_1A_2 共点.

罗马尼亚命题

证法 1　如图 46.1 所示,记

$$A_1A_2=d,AB=a$$

另作一个边长为 $a-d$ 的正 $\triangle A_0B_0C_0$(图 46.2),分别在边 B_0C_0,C_0A_0,A_0B_0 上取点 A',B',C',使得

$$A'C_0=A_2C,B'A_0=B_2A,C'B_0=C_2B$$

则

$$A'B_0=a-d-A'C_0=BC-A_1A_2-A_2C=BA_1$$

同理可得

$$B'C_0=B_1C,C'A_0=C_1A$$

结合

$$\angle B_1CA_2=\angle B'C_0A',\angle B_2AC_1=\angle B'A_0C',\angle C_2BA_1=\angle C'B_0A'$$

知

$$\triangle CB_1A_2\cong\triangle C_0B'A'$$
$$\triangle AC_1B_2\cong\triangle A_0C'B'$$
$$\triangle BA_1C_2\cong\triangle B_0A'C'$$

所以

$$B'C'=C'A'=A'B'=d$$

故 $\triangle A'B'C'$ 是正三角形,所以

$$\angle A'C'B'=\angle C'B'A'=\angle A'B'C'=60^\circ$$

$$\angle AB_2C_1=\angle A_0B'C'=$$
$$180^\circ-\angle C'B'A'-\angle A'B'C_0=$$
$$120^\circ-\angle A'B'C_0$$

所以

$$\angle C_1B_2B_1=\angle B_1A_2A_1$$

结合

此证法属于刁晗生

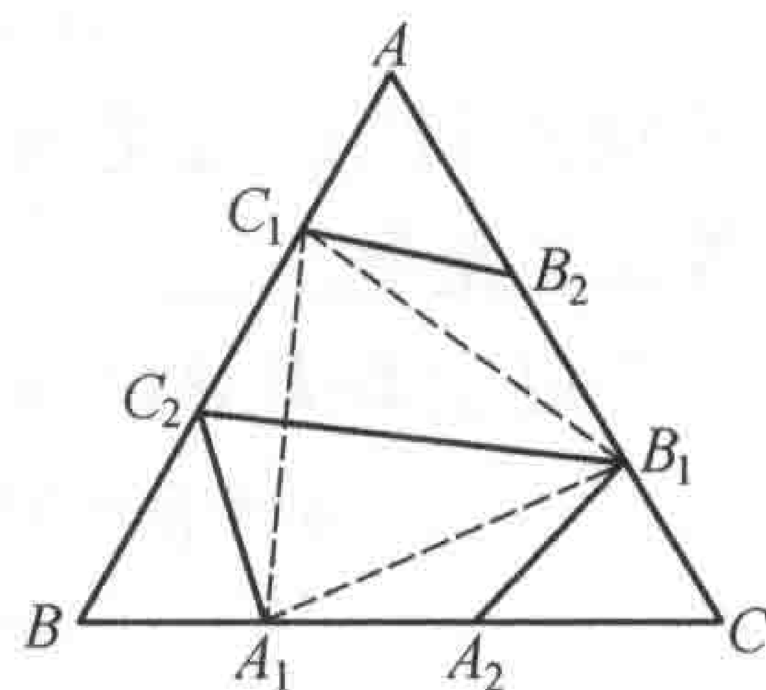


图 46.1

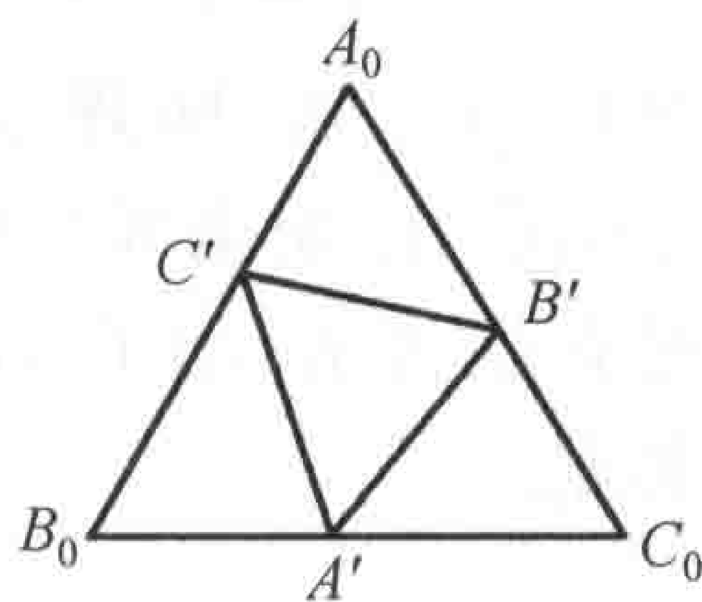


图 46.2

$$B_2C_1=B_1B_2=A_2B_1=A_1A_2=d$$

知

$$\triangle C_1B_2B_1\cong\triangle B_1A_2A_1$$

所以

$$B_1C_1=A_1B_1$$

又

$$C_1C_2=A_1C_2$$

于是 C_2B_1 是 A_1C_1 的垂直平分线，所以 C_2B_1 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边 A_1C_1 上的高. 同理，C_1A_2，A_1B_2 分别是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边 A_1B_1，B_1C_1 上的高，故 A_1B_2，B_1C_2，C_1A_2 共点.

证法 2　如图 46.3 所示，在正 $\triangle ABC$ 内取一点 P，使 $\triangle A_1PA_2$ 是等边三角形. 注意到

$$A_1P\parallel C_1C_2$$

$$A_1P=A_1A_2=C_1C_2=A_1C_2$$

可知 $A_1PC_1C_2$ 是菱形. 同理 $A_2PB_2B_1$ 也是菱形，从而 $\triangle C_1PB_2$ 是等边三角形.

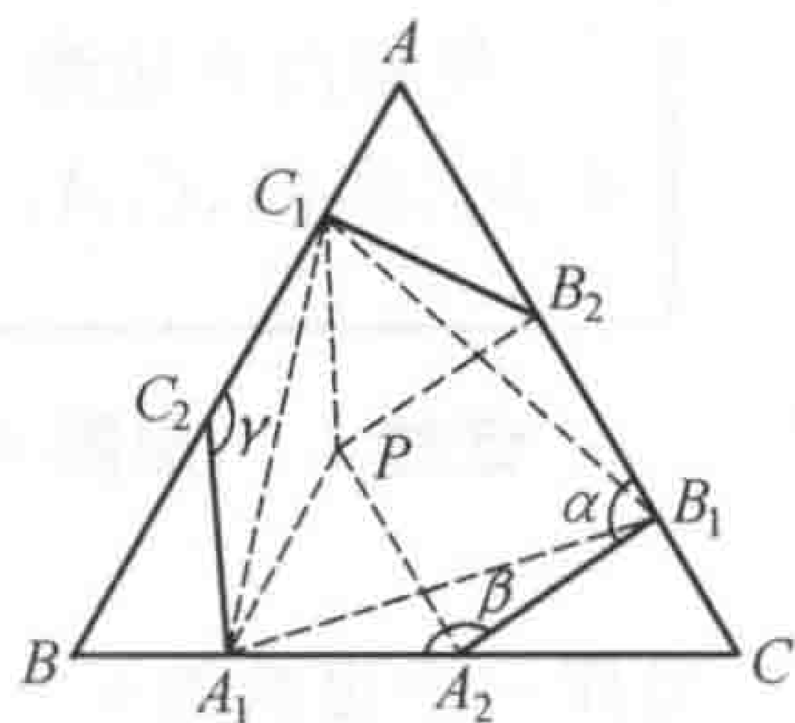


图 46.3

记 $\angle B_2B_1A_2=\alpha$，$\angle B_1A_2A_1=\beta$，$\angle C_1C_2A_1=\gamma$，则

$$\begin{aligned}\alpha+\beta=&360^\circ-(\angle CB_1A_2+\angle B_1A_2C)=\\&360^\circ-(180^\circ-\angle C)=\\&180^\circ+60^\circ=240^\circ\end{aligned}$$

又 $\gamma=\angle C_1PA_1$，$\alpha=\angle B_2PA_2$，于是

$$\gamma+\alpha=360^\circ-(\angle C_1PB_2+\angle A_1PA_2)=240^\circ$$

所以 $\beta=\gamma$. 同理 $\angle C_1B_2B_1=\beta$. 从而 $\triangle A_1A_2B_1$，$\triangle B_1B_2C_1$，$\triangle C_1C_2A_1$ 是全等三角形，于是 $\triangle A_1B_1C_1$ 是等边三角形. 这样易见直线 A_1B_2，B_1C_2，C_1A_2 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 三边的中垂线，从而三线共点.

题目的来源.

问题 1　正 $\triangle ABC$ 与 $A'B'C'$ 均内接于圆 O，两个三角形的三边分别顺序相交于六个点 A_1，$A_2(\in BC)$，B_1，$B_2(\in CA)$，C_1，$C_2(\in AB)$. 求证：三条直线 A_1B_2，B_1C_2，C_1A_2 交于一点 U.

证明　如图 46.4，联结诸线段. 因

$$OA=OA'$$

故

$$\angle OAA'=\angle OA'A$$

又因

$$\angle OAB_2=\angle OA'B_2=30^\circ,\angle B_2AA'=\angle B_2A'A,AB_2=A'B_2$$

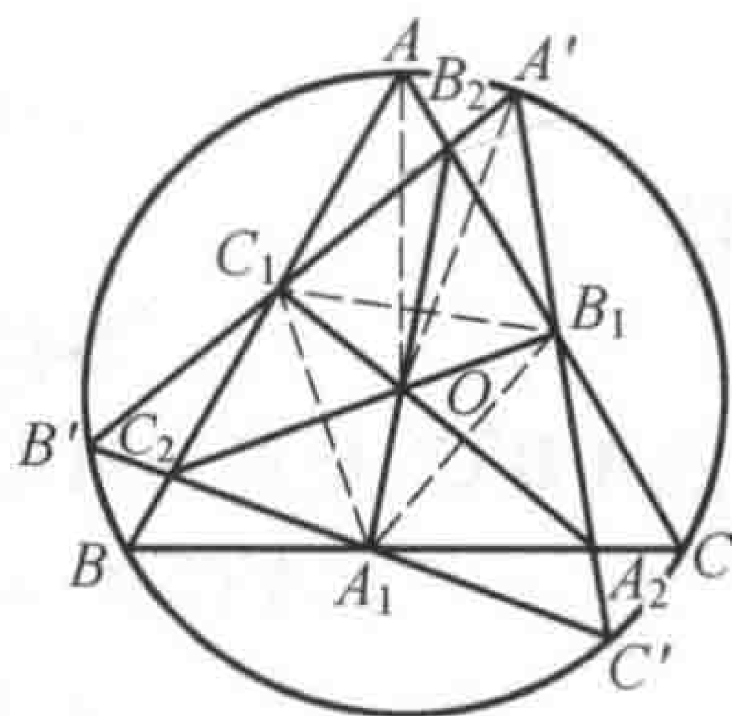


图 46.4

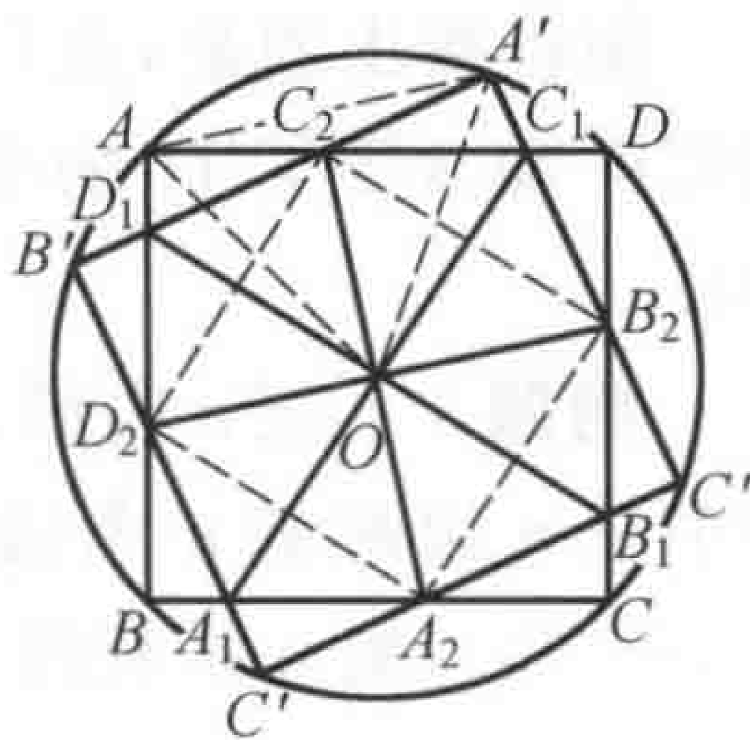


图 46.5

又因

$$\angle C_1AB_2=\angle B_1A'B_2=60^\circ,\angle AB_2C_1=\angle A'B_2B_1$$

故

$$\triangle AB_2C_1\cong\triangle A'B_2B_1$$

同理可得

$$\triangle A'B_2B_1\cong\triangle CA_2B_1\cong\triangle C'A_2A_1\cong\triangle BC_2A_1\cong\triangle B'C_2C_1$$

从而

$$A_1A_2=A_2B_1=B_1B_2=B_2C_1=C_1C_2=C_2A_1$$

(以下证明同原题证明,从略).

事实上,图 46.4 中的六边形 $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ 正是“六边长相等的凸六边形”,完全符合原题的条件,再结合原题证明过程不难得出:题 1 与原题本质是相同的.

题目的推广.

问题 2　正方形 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ 均内接于圆 O,两个正方形的四边分别顺序相交于八个点 $A_1,A_2(\in BC),B_1,B_2(\in CD)$, $C_1,C_2(\in DA),D_1,D_2(\in AB)$. 求证:四条直线 A_1C_1,B_1D_1, A_2C_2,B_2D_2 交于一点 U.

证明　如图 46.5,联结诸线段. $OA=OA'$,故

$$\angle OAA'=\angle OA'A$$

又因

$$\angle OAC_2=\angle OA'C_2=45^\circ$$

故

$$\angle C_2AA'=\angle C_2A'A,AC_2=A'C_2$$

又

$$\angle D_1AC_2=\angle C_1A'C_2=90^\circ,\angle AC_2D_1=\angle A'C_2C_1$$

故

$$\triangle AC_2D_1\cong\triangle A'C_2C_1$$

同理可得

$$\triangle A'C_2C_1\cong\triangle DB_2C_1\cong D'B_2B_1\cong\triangle CA_2B_1\cong$$
$$\triangle C'A_2A_1\cong\triangle BD_2A_1\cong\triangle B'D_2D_1$$

故

$$A_1A_2=A_2B_1=B_1C_1=C_1C_2-C_2D_1=D_1D_2=D_2A_1$$

还易得四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是正方形,而

$$C_2D_1=C_2C_1,A_2A_1=A_2B_1$$

故 A_2C_2 是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的一条对称轴. 同理 B_2D_2 也是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的一条对称轴,而对角线 A_1C_1,B_1D_1 显然也是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的对称轴. 故此正方形的四条对称轴 A_1C_1,B_1D_1, A_2C_2,B_2D_2 必交于一点.

值得指出的是,点 U 恰是四个正方形 $A_1B_1C_1D_1$,$A_2B_2C_2D_2$,$ABCD$ 和 $A'B'C'D$ 的中心. 还可以推广到正 n 边形的情形(证略).

问题3 正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $A'_1A'_2\cdots A'_n$ 均内接于圆 O,两个正 n 边形的 n 条边分别相交,顺次得到的 $2n$ 个交点是 B_1,B_2,$\cdots$,B_{2n},则 n 条直线 B_1B_{n+1},B_2B_{n+2},$\cdots$,B_nB_{2n} 必交于一点 U.

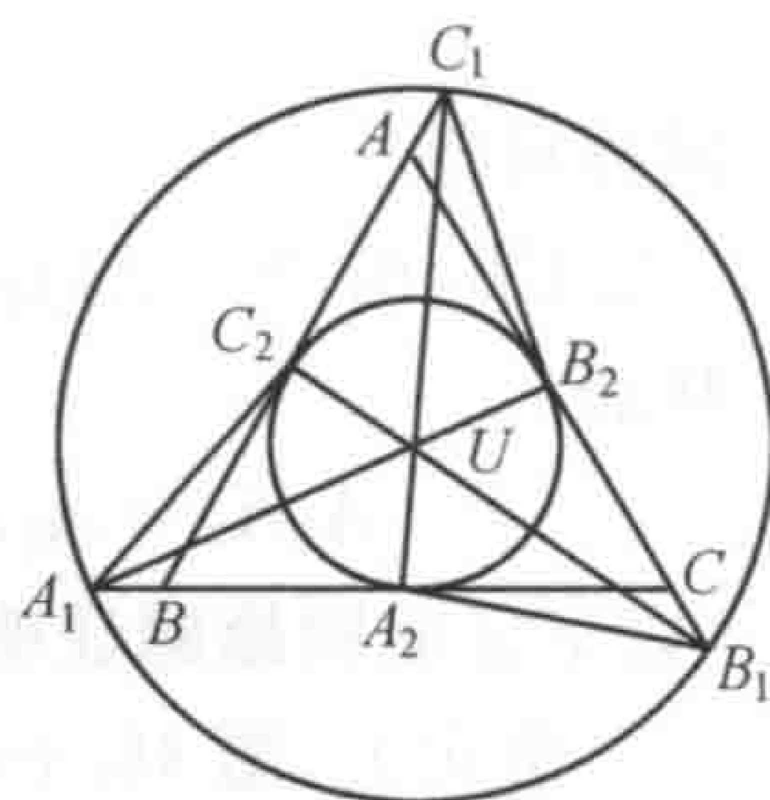


图 46.6

注 (1) 本题条件可以放宽为"在正△ABC 的三边所在直线上"选点,获得等边凸(凹)六边形 $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ 后,结论仍然成立(图 46.6).

(2) 显然,△$A_2B_2C_2$ 也是等边三角形,直线 A_2C_1,B_2A_1,C_2B_1 是△$A_2B_2C_2$ 三边的中垂线. 因此 U 也是△$A_2B_2C_2$ 的中心,△$A_1B_1C_1$ 与△$A_2B_2C_2$ 的外接圆是同心圆,△$A_1B_1C_1$ 与△$A_2B_2C_2$ 为位似图形,U 为位似中心,位似比为两圆半径之比.

荷兰命题

> **2** 设 a_1,a_2,$\cdots$ 是一个整数数列,其中既有无穷多项是正整数,又有无穷多项是负整数. 如果对每一个正整数 n,整数 a_1,a_2,$\cdots$,a_n 被 n 除后所得到的 n 个余数互不相同. 证明:每个整数恰好在数列 a_1,a_2,$\cdots$ 中出现一次.

此证法属于任庆春

证法1 首先,每个整数在此数列中至多出现一次. 若某个整数 k 在此数列中至少出现两次,设

$$a_i=a_j=k\quad(i<j)$$

则在 a_1,a_2,$\cdots$,a_j 中存在两个数 a_i,a_j,它们被 j 除的余数相同,矛盾.

其次,设 a_1,a_2,$\cdots$,a_k 中最大的数为 x_k,最小的数为 y_k($k=1$,2,$\cdots$),则

$$x_k-y_k\leqslant k-1$$

若存在某个 k,使得

$$x_k-y_k\geqslant k$$

不妨设

$$a_i=x_k,a_j=y_k$$
$$a_j-a_i=l\geqslant k$$

则 $i,j\leqslant k\leqslant l$. 所以在 a_1,a_2,$\cdots$,a_l 中存在两个数 a_i,a_j,它们被 l 除的余数相同,矛盾.

下面证明:对每个满足

$$y_k\leqslant t\leqslant x_k$$

的整数 t,都存在正整数 s,$1\leqslant s\leqslant k$,使得 $a_s=t$. 若不然,则 a_1,

$a_2,\cdots,a_k$ 只能取 $\{u\in\mathbf{Z}\mid y_k\leqslant u\leqslant x_k$，且 $u\neq t\}$ 中的值，只有 x_k-y_k 个取值，而

$$x_k-y_k\leqslant k-1<k$$

故 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 中必有两个相同，这与前面已经证明的结论矛盾.

对于任一整数 m，因为数列中有无穷多个正整数，而不超过 $|m|$ 的正整数只有有限个，所以一定存在正整数 p，使得 $a_p>|m|$. 同理，也必存在正整数 q，使得

$$a_q<-|m|$$

设

$$r=\max\{p,q\}$$

则

$$x_r>|m|,y<-|m|$$

所以

$$y_r<m<x_r$$

由前面的结论，必存在正整数 s，使得 $a_s=m$，所以每个整数一定在数列中出现.

综上所述，每个整数恰好在数列中出现一次.

证法 2 首先，若 $i<j$，则 $a_i\neq a_j$. 这是因为，取 $n\geqslant j>i$，由于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 被 n 除后所得到的 n 个余数互不相同，故 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同，特别地，$a_i\neq a_j$.

其次，若 $i<j\leqslant n$，则

$$|a_i-a_j|\leqslant n-1$$

否则，假设

$$m=|a_i-a_j|\geqslant n$$

则 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 中有两个数(a_i 和 a_j) 被 m 除后所得到的余数相同. 矛盾.

现在，对任意正整数 n，记

$$a_{i(n)}=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$
$$a_{j(n)}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

由前证可知

$$i(n)<j(n)\leqslant n\Rightarrow a_{j(n)}-a_{i(n)}\leqslant n-1$$

又由于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同，故

$$a_{j(n)}-a_{i(n)}\geqslant n-1$$

所以

$$a_{j(n)}-a_{i(n)}=n-1$$

这表明集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的元素是 n 个连续整数.

对任意整数 x，因为数列 $a_1,a_2,\cdots$ 中有无穷多项是正整数，也有无穷多项是负整数，且数列的项互不相同，所以必存在 i,j 使

得 $a_i < x < a_j$. 取 $n > \max\{i,j\}$, 由于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 包含了 a_i 和 a_j 之间的所有整数，当然也包含了 x. 这就证明了，每个整数恰好在数列 $a_1, a_2, \cdots$ 中出现一次.

注 可证明，如下构造的数列 $\{a_n\}$ 符合题意，即

$$a_n = \begin{cases} k, n = 2k \\ 1-k, n = 2k-1, k = 1,2,\cdots \end{cases}$$

易见数列 $\{a_n\}$ 为

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots$$

不难证明对每一个正整数 n, 整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 被 n 除后所得到的 n 个余数互不相同，且每个整数恰好在数列 $\{a_n\}$ 中出现一次.

3 正实数 x, y, z 满足 $xyz \geqslant 1$, 证明

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geqslant 0$$

韩国命题

证法 1 我们只需证明

此证法属于康嘉引

$$\sum \frac{x^5}{x^5 + y^2 + z^2} \geqslant 1 \geqslant \sum \frac{x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \quad ①$$

设

$$xyz = d^3 \geqslant 1$$

令

$$x = x_1 d, y = y_1 d, z = z_1 d$$

则

$$x_1 y_1 z_1 = 1$$

且

$$\sum \frac{x^5}{x^5 + y^2 + z^2} = \sum \frac{x_1^5 d^3}{x_1^5 d^3 + y_1^2 + z_1^2} = \sum \frac{x_1^5}{x_1^5 + \frac{1}{d^3}(y_1^2 + z_1^2)} \geqslant \sum \frac{x_1^5}{x_1^5 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$\sum \frac{x^2}{x^5 + y^2 + z^2} = \sum \frac{x_1^2 d^2}{x_1^5 d^5 + y_1^2 d^2 + z_1^2 d^2} = \sum \frac{x_1^2}{x_1^5 d^3 + y_1^2 + z_1^2} \leqslant \sum \frac{x_1^2}{x_1^5 + y_1^2 + z_1^2}$$

所以，我们只需在 $xyz = 1$ 的情况下，证明式 ①.

因为

$$\sum \frac{x^5}{x^5+y^2+z^2}=\sum \frac{x^5}{x^5+xyz(y^2+z^2)}=$$
$$\sum \frac{x^4}{x^4+y^3z+yz^3}\geqslant$$
$$\sum \frac{x^4}{x^4+y^4+z^4}=1$$

所以,式 ① 的左边得证.

而

$$\sum \frac{x^2}{x^5+y^2+z^2}=\sum \frac{x^2\cdot xyz}{x^5+xyz(y^2+z^2)}=$$
$$\sum \frac{x^2yz}{x^4+yz(y^2+z^2)}$$

由平均不等式

$$x^4+x^4+y^3z+yz^3\geqslant 4x^2yz$$
$$x^4+y^3z+y^3z+y^2z^2\geqslant 4xy^2z$$
$$x^4+yz^3+yz^3+y^2z^2\geqslant 4xyz^2$$
$$y^3z+yz^3\geqslant 2y^2z^2$$

把上面 4 个不等式相加,可得

$$x^4+yz(y^2+z^2)\geqslant x^2yz+xy^2z+xyz^2$$

所以

$$\sum \frac{x^2}{x^5+y^2+z^2}=\sum \frac{x^2yz}{x^4+y^3z+yz^3}\leqslant$$
$$\sum \frac{x^2yz}{x^2yz+xy^2z+xyz^2}=1$$

从而式 ① 的右边得证.

证法 2　因为

此证法属于 Boreico Iurie

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}-\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=$$
$$\frac{x^2(x^3-1)^2(y^2+z^2)}{x^3(x^5+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)}\geqslant 0$$

所以

$$\sum \frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\geqslant \sum \frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=$$
$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\geqslant$$
$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum(x^2-yz)(\text{因为 } xyz\geqslant 1)\geqslant$$
$$0$$

证法 3　显然原不等式等价于

此证法属于王建伟

$$\sum \frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} \leqslant 3 \tag{②}$$

其中，$\sum$ 表示关于 x,y,z 的循环和.

利用柯西不等式及 $xyz \geqslant 1$ 得

$$(x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2) \geqslant$$
$$(\sqrt{x^5 yz}+\sqrt{y^2 \cdot y^2}+\sqrt{z^2 \cdot z^2})^2 \geqslant$$
$$(x^2+y^2+z^2)^2$$

所以式 ② 左边小于等于

$$\sum \frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} \leqslant \sum \frac{\frac{y^2+z^2}{2}+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}=3$$

推广 （1）显然原不等式中等号成立当且仅当

$$x=y=z=1$$

（2）设 n 为正整数，正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足

$$x_1x_2\cdots x_n \geqslant 1$$

则

$$\sum \frac{x_1^{2n-1}-x_1^{n-1}}{x_1^{2n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}} \geqslant 0 \tag{③}$$

其中，$\sum$ 表示关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的循环和.

因为式 ③ 等价于

$$\sum \frac{x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}}{x_1^{2n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}} \leqslant n \tag{④}$$

利用柯西不等式及 $x_1x_2\cdots x_n \geqslant 1$ 得

$$(x_1^{2n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1})(x_2\cdots x_n+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}) \geqslant$$
$$(\sqrt{x_1^{2n-1}x_2\cdots x_n}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1})^2 \geqslant$$
$$(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1})^2$$

所以式 ④ 左边小于等于

$$\sum \frac{x_2\cdots x_n+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}}{x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}} \leqslant$$
$$\sum \frac{\frac{x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}}{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}}{x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}}=n$$

显然式 ③ 中等号成立当且仅当

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=1$$

（3）设正实数 x,y,z 满足

$$yz+zx+xy \geqslant 3$$

则

$$\sum \frac{x^4-x^2}{x^4+y^2+z^2} \geqslant 0 \quad ⑤$$

其中，$\sum$ 表示关于 x,y,z 的循环和.

因为式 ⑤ 等价于

$$\sum \frac{x^2+y^2+z^2}{x^4+y^2+z^2} \leqslant 3 \quad ⑥$$

利用柯西不等式及

$$yz+zx+xy \geqslant 3$$

得

$$(x^4+y^2+z^2)(\frac{yz+zx+xy}{3}+y^2+z^2) \geqslant$$

$$(x^2\sqrt{\frac{yz+zx+xy}{3}}+y^2+z^2)^2 \geqslant$$

$$(x^2+y^2+z^2)^2$$

所以式 ⑥ 左边小于等于

$$\sum \frac{\frac{yz+zx+xy}{3}+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} \leqslant$$

$$\sum \frac{\frac{y^2+z^2}{6}+\frac{z^2+x^2}{6}+\frac{x^2+y^2}{6}+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}=3$$

显然式 ⑥ 中等号成立当且仅当

$$x=y=z=1$$

(4) 设正实数 x,y,z 满足

$$x+y+z \geqslant 3$$

则

$$\sum \frac{x^4-x^2}{x^4+y^2+z^2} \geqslant 0 \quad ⑦$$

其中，$\sum$ 表示关于 x,y,z 的循环和，式中等号成立当且仅当 $x=y=z=1$.

证明类似于式 ⑤ 的证明.

4 数列 $a_1,a_2,\cdots$ 定义如下

$$a_n=2^n+3^n+6^n-1, n=1,2,\cdots$$

求与此数列的每一项都互素的所有正整数.

波兰命题

解法 1 我们先证明如下结论：对任意不小于 5 的素数 p，都有

此解法属于罗晔

$$2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1 \equiv 0 \pmod{p} \quad ①$$

因为 p 是不小于 5 的素数，所以

$$(2,p)=1,(3,p)=1,(6,p)=1$$

由费马小定理

$$2^{p-1}\equiv 1(\bmod p),3^{p-1}\equiv 1(\bmod p),6^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$$

所以

$$3\cdot 2^{p-1}+2\cdot 3^{p-1}+6^{p-1}\equiv 3+2+1=6(\bmod p)$$

即

$$6\cdot 2^{p-2}+6\cdot 3^{p-2}+6\cdot 6^{p-2}\equiv 6(\bmod p)$$

故

$$2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1\equiv 0(\bmod p)$$

所以式 ① 成立，于是

$$a_{p-2}=2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1\equiv 0(\bmod p)$$

又

$$a_1=10,a_2=48$$

对任意大于1的正整数 n，它必有一个素因数 p. 若 $p\in\{2,3\}$，则

$$(n,a_2)>1$$

若 $p\geqslant 5$，则

$$(n,a_{p-2})>1$$

故大于1的正整数都不符合要求.

而1与所有正整数都互素，所以符合题设要求的正整数只能为1.

解法2 令

$$b_n=a_n+1=2^n+3^n+6^n,n=-1,0,1,2,\cdots$$

则

$$b_0=3,b_{-1}=1$$

由特征根方法易知

$$b_{n+3}=11b_{n+2}-36b_{n+1}+36b_n,n=-1,0,1,\cdots \quad ②$$

（设

$$f(x)=(x-2)(x-3)(x-6)$$

由

$$2^n f(2)+3^n f(3)+6^n f(6)=0$$

可得上式）.

对任一大于3的素数 p，有

$$(p,6)=1$$

记 $\overline{m}$ 为整数 m 除以 p 的余数，由于不同的3元组 $(\overline{m_1},\overline{m_2},\overline{m_3})$ 只有 p^3 个，由抽屉原理，必存在 $i,j,-1\leqslant i<j$，使得

$$(\overline{b_i},\overline{b_{i+1}},\overline{b_{i+2}})=(\overline{b_j},\overline{b_{j+1}},\overline{b_{j+2}})$$

则

$$36b_{i-1} \equiv b_{i+2} - 11b_{i+1} + 36b_i \equiv b_{j+2} - 11b_{j+1} + 36b_j \equiv 36b_{j-1} \pmod p$$

$$p \mid 36(b_{i-1} - b_{j-1}) \Rightarrow p \mid (b_{i-1} - b_{j-1}) \Rightarrow (\bar{b}_{i-1}, \bar{b}_i, \bar{b}_{i+1}) = (\bar{b}_{j-1}, \bar{b}_j, \bar{b}_{j+1})$$

依此类推,可得

$$(\bar{b}_{-1}, \bar{b}_0, \bar{b}_1) = (\bar{b}_{j-i-1}, \bar{b}_{j-i}, \bar{b}_{j-i+1})$$

特别地

$$b_{j-i-1} \equiv b_{-1} = 1 \pmod p$$

从而

$$p \mid b_{j-i-1} - 1 \Rightarrow p \mid a_{j-i-1}$$

若

$$j - i - 1 = 0$$

则

$$a_0 = 2, p \mid 2$$

矛盾,故

$$j - i - 1 \geqslant 1$$

又因为$a_2 = 48$,所以与此数列的每一项都互素的正数只有 1.

推广 我们常称题中的 a_n 为幂和式.幂和式(特别是 2 项幂和式)是数学竞赛的常客.

(1) 数列 $a_1, a_2, \cdots$ 定义如下,即

$$a_n = 2^n + 4^n + 7^n + 14^n + 28^n - 1, n = 1, 2, \cdots$$

则与此数列的每一项都互素的正整数只有 $1, 7, 7^2, 7^3, \cdots$.

因为对任一不等于 2 和 7 的素数 p,有

$$(p, 28) = 1$$

由费马小定理得

$$28a_{p-2} = 14 \cdot 2^{p-1} + 7 \cdot 4^{p-1} + 4 \cdot 7^{p-1} + 2 \cdot 14^{p-1} + 28^{p-1} - 28 \equiv 14 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 - 28 \equiv 0 \pmod p$$

$$p \mid 28a_{p-2} \Rightarrow p \mid a_{p-2}$$

又因为 $2 \mid a_1$,且易得 $7 \nmid a_n$,所以与此数列的每一项都互素的正整数只有 $7^k (k = 0, 1, 2, \cdots)$.

进一步推广可得:

(2) 设 p 为素数,$q = 2^p - 1$ 也为素数(麦森素数),则

$$W = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

为完全数.数列 $a_1,a_2,\cdots$ 定义如下,即

$$a_n=2^n+2^{2n}+2^{3n}+\cdots+2^{(p-1)n}+q^n+(2q)^n+(2^2q)^n+\cdots+(2^{p-1}q)^n-1,n=1,2,\cdots$$

则与此数列的每一项都互素的正整数只有 $1,q,q^2,q^3,\cdots(p\geqslant 3)$ 或 $1(p=2)$.

对 $p=2$(原题) 和 $p=3$(推广(1)) 命题已证.对 $p\geqslant 3$ 的一般情形,设 D 为任一不等于 2 和 q 的素数,则 $(D,W)=1$,由费马小定理得

$$Wa_{p-2}=\sum_{i=1}^{p-1}(2^{p-1-i}q)2^{i(p-1)}+\sum_{i=0}^{p-1}(2^{p-1-i})(2^iq)^{p-1}-W\equiv$$
$$\sum_{i=1}^{p-1}2^{p-1-i}q+\sum_{i=0}^{p-1}2^{p-1-i}-W=$$
$$(2^{p-1}-1)q+(2^p-1)-W=0(\bmod D)$$
$$D\mid Wa_{p-2}\Rightarrow D\mid a_{p-2}$$

又因为 $2\nmid a_1$ 且

$$a_n\equiv\sum_{i=1}^{p-1}2^{in}-1=\frac{2^{pn}-1}{2^n-1}-1(\bmod q)$$

若 $p\nmid n$,则 $(p,n)=1$,且

$$(2^n-1,q)=(2^n-1,2^p-1)=1$$

从而

$$2^{pn}-1\equiv 0(\bmod q)\Rightarrow$$
$$\frac{2^{pn}-1}{2^n-1}\equiv 0(\bmod q)\Rightarrow$$
$$a_n\equiv -1\not\equiv 0(\bmod q)$$

若 $p\mid n$,则

$$a_n\equiv\sum_{i=1}^{p-1}2^{in}-1\equiv\sum_{i=1}^{p-1}1-1=p-2\not\equiv 0(\bmod q)$$

因此

$$q\nmid a_n,n=1,2,\cdots$$

推广命题得证.

(3) 数列 $a_1,a_2,\cdots$ 定义如下,即

$$a_n=3^n+3\cdot 5^n+15^n-1,n=1,2,\cdots$$

则与此数列的每一项都互素的正整数只有

$$1,3,3^2,3^3,\cdots$$

因为对任一不等于 3 和 5 的素数 p,有

$$(p,15)=1$$

由费马小定理得

$$15a_{p-2}=5\cdot 3^{p-1}+3^2\cdot 5^{p-1}+15^{p-1}-15\equiv$$
$$5\cdot 1+3^2\cdot 1+1-15\equiv 0(\bmod p)$$

$$p \mid 15a_{p-2} \Rightarrow p \mid a_{p-2}$$

又因为

$$3 \nmid a_n, 5 \mid a_4$$

所以与此数列的每一项都互素的正整数只有 $3^k(k=0,1,2,\cdots)$.

(4) 数列 $a_1,a_2,\cdots$ 定义如下,即

$$a_n=2^n+3^n+7^n+42^n-1, n=1,2,\cdots$$

则与此数列的每一项都互素的正整数只有形如 $2^l\cdot 3^m\cdot 7^k(l,m,k$ 为非负整数) 的所有正整数.

(5) 数列 $a_1,a_2,\cdots$ 定义如下,即

$$a_n=2^n+3^n+7^n+43^n+1\ 806^n-1, n=1,2,\cdots$$

则与此数列的每一项都互素的正整数只有 $1,43,43^2,\cdots$.

证明类似于上.

5 给定凸四边形 $ABCD$, $BC=AD$, 且 BC 不平行于 AD. 设点 E 和 F 分别在边 BC 和 AD 的内部,满足 $BE=DF$. 直线 AC 和 BD 相交于点 P,直线 BD 和 EF 相交于点 Q,直线 EF 和 AC 相交于点 R. 证明:当点 E 和 F 变动时, $\triangle PQR$ 的外接圆经过除点 P 外的另一个定点.

波兰命题

证明 由题意, BC 不平行于 AD,则 $\triangle APD$ 的外接圆与 $\triangle BPC$ 的外接圆不相切. 否则,过切点作公切线 SS',如图 46.7 所示,则

此证法属于赵彤远

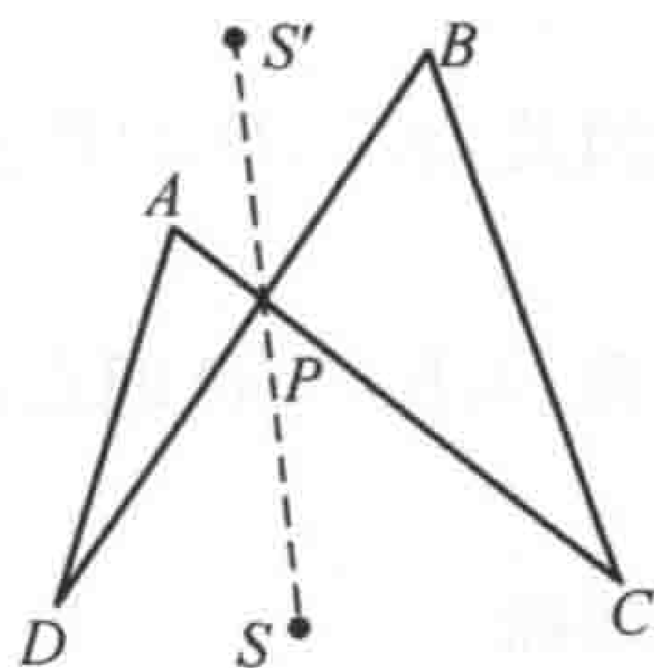


图 46.7

$$\angle DPS=\angle DAP, \angle BPS'=\angle BCP$$

又

$$\angle DPS=\angle BPS'$$

所以

$$\angle BCP=\angle DAP$$

于是

$$AD \parallel BC$$

与题设矛盾.

故可设它们除点 P 外交于点 O,则 O 是定点. 不妨设 O 在 $\triangle DPC$ 内,下面证明:当点 E 和 F 变动时, $\triangle PQR$ 的外接圆经过点 O.

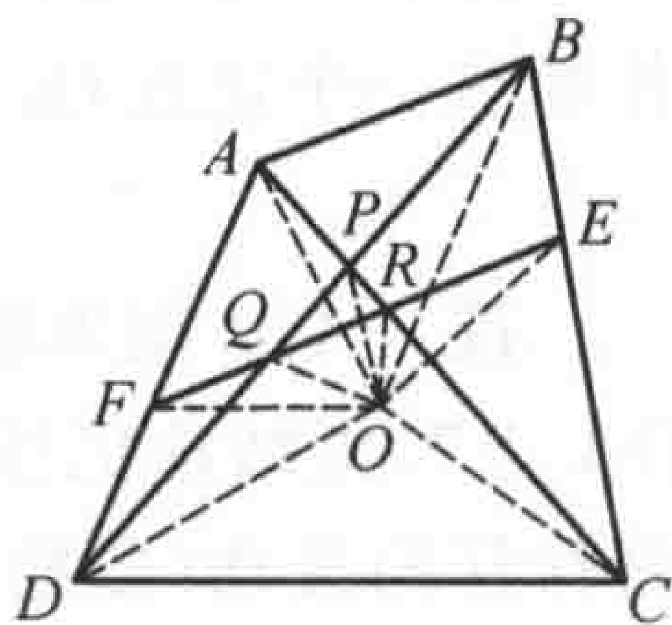


图 46.8

如图 46.8 所示,联结 $OA,OB,OC,OD,OE,OF,OP,OQ,OR$,则由 B,C,O,P 四点共圆和 O,P,A,D 四点共圆得

$$\angle OBC=\angle OPC, \angle OPC=\angle ADO$$

所以

$$\angle OBC=\angle ADO$$

同理

$$\angle OCB = \angle DPO = \angle DAO$$

再结合

$$AD = BC$$

得

$$\triangle OBC \cong \triangle ODA$$

故

$$OB = OD, \angle OBE = \angle ODF$$

又由条件

$$BE = DF$$

可得

$$\triangle OBE \cong \triangle ODF$$

所以

$$OE = OF, OB = OD$$

而

$$\angle FOE = \angle FOB + \angle BOE = \angle BOF + \angle FOD = \angle BOD$$

于是

$$\triangle BOD \backsim \triangle FOE$$

所以

$$\angle EFO = \angle BDO$$

即

$$\angle QFO = \angle QDO$$

因此 Q,F,D,O 四点共圆,得

$$\angle RQO = \angle FDO$$

而 O,P,A,D 四点共圆,故

$$\angle FDO = \angle ADO = \angle RPO$$

因而

$$\angle RQO = \angle RPO$$

所以 O,R,P,Q 四点共圆.

综上所述,当点 E 和 F 变动时,$\triangle PQR$ 的外接圆经过除点 P 外的另一个定点 O.

注 (1) 把原题的"边 BC 和 AD 的内部"改为"射线 BC 和 DA 上",则结论仍然成立,$\triangle PQR$ 的外接圆仍过点 O,且原证明不需作任何改动(图略).

(2) 把原题的"边 BC 和 AD 的内部"改为"射线 CB 和 AD 上",则结论仍然成立,$\triangle PQR$ 的外接圆仍过点 O,原证明仅需作轻微改动($\angle OQB = 180° - \angle OEB = \angle ORC$,从而 $\angle OQP = \angle ORP$)(图略).

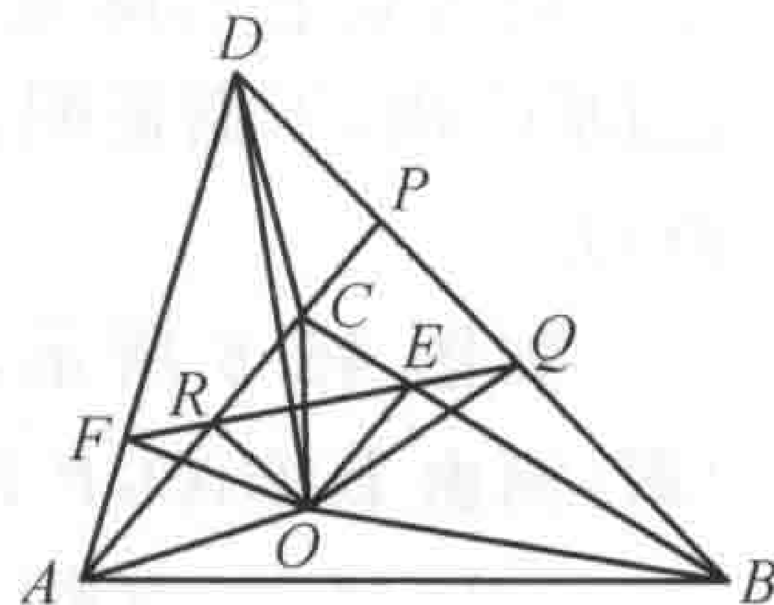


图 46.9

(3) 把原题的“凸四边形”改为“凹四边形”，则结论仍然成立，$\triangle PQR$ 的外接圆仍过点 O，如图 46.9 所示，原证明仅需作轻微改动（$180^\circ - \angle OEQ = \angle OER = \angle OCR = \angle OBQ$）.

6 某次数学竞赛共有 6 个试题，其中任意两个试题都被超过 $\frac{2}{5}$ 的参赛者答对了，但没有一个参赛者能答对所有的 6 个试题. 证明：至少有两个参赛者都恰好答对了 5 个试题.

罗马尼亚命题

此证法属于邵垣程

证法 1 设有 n 个参赛者，记为

$$C_1, C_2, \cdots, C_n$$

将 6 个试题记为

$$P_1, P_2, \cdots, P_6$$

设

$S = \{(C_k; P_i, P_j) \mid 1 \leqslant k \leqslant n, 1 \leqslant i < j \leqslant 6, C_k$ 同时答对了 P_i 和 $P_j\}$

下面我们来考虑 $|S|$.

设 P_i 和 $P_j (1 \leqslant i < j \leqslant 6)$ 同时被 x_{ij} 个参赛者答对，由题意，应有

$$x_{ij} > \frac{2}{5} n$$

从而

$$x_{ij} \geqslant \frac{2n+1}{5}$$

于是

$$|S| = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 6} x_{ij} \geqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 6} \frac{2n+1}{5} = C_6^2 \cdot \frac{2n+1}{5} = 6n+3 \quad ①$$

假设至多有一个参赛者恰好答对了 5 个试题，由于没有一个参赛者能答对所有 6 个试题，所以其他参赛者至多答对了 4 个试题. 设 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 分别答对了 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 个试题，不妨设

$$5 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$$

若 $a_1 \leqslant 4$，则

$$a_k \leqslant 4, 1 \leqslant k \leqslant n$$

故

$$|S| = \sum_{k=1}^{n} C_{a_k}^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} C_4^2 = 6n$$

与式 ① 矛盾. 所以

$$a_1 = 5, 4 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$$

显然，$n \geqslant 2$. 若 $a_n \leqslant 3$，则

$$|S|=\sum_{k=1}^{n}C_{a_k}^2\leqslant C_5^2+(n-2)C_4^2+C_3^2=6n+1$$

与式 ① 矛盾. 故 $a_n\geqslant 4$,从而

$$a_2=a_3=\cdots=a_n=4$$

不妨设 C_1 答对的 5 个试题为

$$P_1,P_2,\cdots,P_5$$

设有 b_j 个参赛者答对试题 $P_j(1\leqslant j\leqslant 6)$,则

$$b_1+b_2+\cdots+b_6=a_1+a_2+\cdots+a_n=5+4(n-1)=4n+1 \quad ②$$

考虑

$$\sum_{j=2}^{6}x_{1j}\geqslant\sum_{j=2}^{6}\frac{2n+1}{5}=2n+1 \quad ③$$

由于有 b_1 个参赛者答对试题 P_1,在这 b_1 个参赛者中有一个共答对 5 题,其余均答对 4 题,故有

$$\sum_{j=2}^{6}x_{1j}\geqslant 4+3(b_1-1)=3b_1+1 \quad ④$$

结合式 ③,④,可得

$$2n+1\leqslant 3b_1+1$$

故

$$b_1\geqslant\frac{2n}{3}$$

同理可证

$$b_k\geqslant\frac{2n}{3},k=1,2,3,4,5 \quad ⑤$$

完全类似地,考虑

$$\sum_{j=1}^{5}x_{j6}\geqslant\sum_{j=1}^{5}\frac{2n+1}{5}=2n+1 \quad ⑥$$

由于恰好有 b_6 个参赛者答对试题 P_6,这 b_6 个参赛者平均只答对了 4 个试题,故有

$$\sum_{j=1}^{5}x_{j6}=3b_6 \quad ⑦$$

结合式 ⑥,⑦ 可得

$$3b_6\geqslant 2n+1$$

所以

$$b_6\geqslant\frac{2n+1}{3} \quad ⑧$$

若 $n\not\equiv 0(\bmod 3)$,则 $\frac{2n}{3}$ 不是整数,故由式 ⑤ 知

$$b_k>\frac{2n}{3},1\leqslant k\leqslant 5$$

从而

$$b_k \geqslant \frac{2n+1}{3}, 1 \leqslant k \leqslant 5 \qquad ⑨$$

结合式 ⑧,⑨ 可得

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_6 \geqslant 6 \cdot \frac{2n+1}{3} = 4n+2$$

与式 ② 矛盾. 所以

$$n \equiv 0 \pmod 3$$

从而由式 ⑧ 知

$$b_6 > \frac{2n}{3}$$

而 b_6 和 $\frac{2n}{3}$ 都是整数,所以

$$b_6 \geqslant \frac{2n}{3} + 1 \qquad ⑩$$

结合式 ④,⑩ 得

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_6 \geqslant 5 \cdot \frac{2n}{3} + \frac{2n}{3} + 1 = 4n+1 \qquad ⑪$$

由式 ② 知,式 ⑪ 取等号,故式 ⑤ 与 ⑩ 均取等号,故有

$$b_6 = \frac{2n}{3} + 1$$

考虑

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 5} x_{ij} \geqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 5} \frac{2n+1}{5} = 2(2n+1) = 4n+2 \qquad ⑫$$

由于有一个参赛者答对了试题 $P_1, P_2, \cdots, P_5$,有 b_6 个参赛者恰好答对了 $P_1, P_2, \cdots, P_5$ 中的 3 个题,有 $n-1-b_6$ 个参赛者恰好答对了 $P_1, P_2, \cdots, P_5$ 中的 4 个题,故

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 5} x_{ij} = C_5^2 + b_6 C_3^2 + (n-1-b_6) C_4^2 = 6n + 4 - 3b_6 = 4n+1$$

这与式 ⑫ 矛盾.

注 (1) 只有两位参赛者恰好答对 5 道题是有可能的. 例如,共有 7 名选手参赛,A_1 答对 1 ~ 5 题,A_2 答对 1,2,3,4,6 题,A_3 答对 1,2,3,5 题,A_4 答对 1,4,5,6 题,A_5 答对 2,4,5,6 题,A_6 答对 1,2,3,6 题,A_7 答对 3 ~ 6 题. 易验知此时任意两道题都被至少 3 人答对.

(2) 如果去掉条件"没有一个参赛者能答对所有的 6 道试题",把结论改为"至少有两个参赛者都至少答对了 5 道题",则新结论不成立. 例如,共有 7 名选手参赛,A_1 答对 1 ~ 6 题,A_2 答对 1 ~ 4 题,A_3 答对 1,2,5,6 题,A_4 答对 3 ~ 6 题,A_5 答对 1,3,4,5

题，A_6 答对 1，2，3，6 题，A_7 答对 2，4，5，6 题. 易验知此时任意两道题都被至少 3 人答对. 甚至还有最极端的例子：参赛选手只有两人，A_1 6 题全对，A_2 6 题全错.

证法 2 设有 n 个参赛者，令 p_{ij} 表示答对第 i 道试题和第 j 道试题的参赛者的人数 $(1 \leqslant i < j \leqslant 6)$，并记 $n_r(0 \leqslant r \leqslant 6)$ 为恰好答对 r 道试题的参赛者的人数. 则

$$\sum_{r=0}^{6} n_r = n$$

由题设，对所有 $1 \leqslant i < j \leqslant 6$，都有

$$p_{ij} > \frac{2}{5}n$$

从而

$$p_{ij} \geqslant \frac{2n+1}{5}$$

于是

$$S = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 6} p_{ij} \geqslant C_6^2 \cdot \frac{2n+1}{5} = 6n + 3 \quad ⑬$$

另一方面，对于一个恰好答对 r 道试题的参赛者，他对上面和式的贡献为 C_r^2（当 $r < 2$ 时，$C_r^2 = 0$）. 所以

$$S = \sum_{r=0}^{6} C_r^2 n_r \quad ⑭$$

由式 ⑬，⑭ 可得

$$S = \sum_{r=0}^{6} C_r^2 n_r \geqslant 6n + 3 = 6\sum_{r=0}^{6} n_r + 3$$

由题设，$n_6 = 0$，故上式为

$$4n_5 \geqslant 3 + 6n_0 + 6n_1 + 5n_2 + 3n_3$$

所以

$$n_5 \geqslant 1$$

若 $n_5 = 1$，则

$$n_0 = n_1 = n_2 = n_3 = 0$$

于是

$$n_4 = n - 1$$

由式 ⑭ 知，此时

$$S = 6n + 4$$

由于

$$S = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 6} p_{ij}$$

中的 15 个加数 p_{ij} 都至少是 $\frac{2n+1}{5}$（记为 λ），而

$$S=6n+4$$

不是 15 的倍数,故这些 p_{ij} 不可能全相等. 于是,其中有 14 个为 λ, 1 个为 $\lambda+1$.

设 (i_0, j_0) 使得

$$p_{i_0j_0}=\lambda+1$$

答对 5 道题的参赛者称为"优胜者".

不失一般性,不妨设"优胜者"没有答对第 6 题,且 i_0, j_0 不为 1,于是

$$2\leqslant i_0<j_0\leqslant 6$$

考虑和式

$$S'=p_{16}+p_{26}+p_{36}+p_{46}+p_{56}$$
$$S''=p_{12}+p_{13}+p_{14}+p_{15}+p_{16}$$

设有 x 个参赛者答对了第 6 题,则他们中的每一个对 S' 的贡献为 3;有 y 个参赛者答对了第 1 题(除"优胜者"外),他们中的每一个对 S'' 的贡献为 3,而"优胜者"对 S'' 的贡献为 4,于是

$$S'=3x, S''=3y+4$$

而 $p_{i_0j_0}$ 不在 S'' 中出现,所以

$$S''=5\lambda=2n+1$$

故 S' 为 5λ 或 $5\lambda+1$.

从而

$$3x=2n+1$$

或

$$3x=2n+2$$

且

$$3y+4=2n+1$$

由

$$3y+4=2n+1$$

知

$$3\mid n$$

而这与

$$3x=2n+1 \text{ 或 } 3x=2n+2$$

矛盾. 所以

$$n_5\geqslant 2$$

第 46 届国际数学奥林匹克英文原题

The forty-sixth IMO was held from July 8th to July 19th 2005 in the city of Mexico.

1 Six points are chosen on the sides of an equilateral triangle ABC: A_1, A_2 on BC; B_1, B_2 on CA; C_1, C_2 on AB. These points are the vertices of a convex hexagon $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ with equal side lengths. Prove that the lines A_1B_2, B_1C_2 and C_1A_2 are concurrent. (Romania)

2 Let $a_1, a_2, \cdots$ be a sequence of integers with infinitely many positive terms and infinitely many negative terms. Suppose that for each positve integer n, the numbers $a_1, a_2, \cdots, a_n$ leave n different remainders on division by n. Prove that each integer occurs exactly once in the sequence $a_1, a_2, \cdots$. (Netherlands)

3 Let x, y and z be positive real numbers such that $xyz \geqslant 1$. Prove that (Korea)

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geqslant 0$$

4 Consider the sequence $a_1, a_2, \cdots$ defined by (Poland)

$$a_n=2^n+3^n+6^n-1, n=1,2,\cdots$$

Determine all positive integers that are relatively prime to every term of the sequence.

5 Let $ABCD$ be a given convex quadrilateral with sides BC and AD equal in length and not parallel. Let E and F be interior points of the sides BC and AD respectively such that $BE=DF$. The lines AC and BD meet at P, the lines BD and EF meet at Q, the lines EF and AC meet at R. (Poland)

Consider all the triangles PQR as E and F vary. Show that the circumcircles of these triangles have a fixed point other than P.

6 In a mathematical competition, there were 6 test questions. Each pair of problems was solved by more than $\frac{2}{5}$ of the contestants. Nobody solved all 6 problems. Show that there were at least 2 contestants who each solved exactly 5 problems.

(Romania)

第46届国际数学奥林匹克各国成绩表

2005，墨西哥

名次	国家或地区	分数（满分252）	奖牌 金牌	银牌	铜牌	参赛队人数
1.	中国	235	5	1	—	6
2.	美国	213	4	2	—	6
3.	俄罗斯	212	4	2	—	6
4.	伊朗	201	2	4	—	6
5.	韩国	200	3	3	—	6
6.	罗马尼亚	191	4	1	1	6
7.	中国台湾	190	3	2	1	6
8.	日本	188	3	1	2	6
9.	匈牙利	181	2	3	1	6
10.	乌克兰	181	2	2	2	6
11.	保加利亚	173	2	3	1	6
12.	德国	163	1	3	2	6
13.	英国	159	1	3	2	6
14.	新加坡	145	—	4	2	6
15.	越南	143	—	3	3	6
16.	捷克	139	1	2	2	6
17.	中国香港	138	1	3	1	6
18.	白俄罗斯	136	1	3	1	6
19.	加拿大	132	1	2	2	6
20.	斯洛伐克	131	—	4	2	6
21.	摩尔多瓦	130	1	2	2	6
22.	土耳其	130	—	4	1	6
23.	泰国	128	—	4	2	6
24.	意大利	120	—	2	4	6
25.	澳大利亚	117	—	—	6	6
26.	哈萨克斯坦	112	—	2	3	6
27.	哥伦比亚	105	—	2	2	6
28.	波兰	105	—	1	5	6
29.	秘鲁	104	—	—	6	6

续表

名次	国家或地区	分数 （满分 252）	奖牌 金牌	 银牌	 铜牌	参赛队 人数
30.	以色列	99	—	2	3	6
31.	墨西哥	91	—	—	4	6
32.	法国	83	—	—	4	6
33.	巴西	82	1	—	1	6
34.	克罗地亚	82	—	1	2	6
35.	亚美尼亚	82	—	—	5	6
36.	印度	81	—	1	1	6
37.	格鲁吉亚	80	—	—	4	6
38.	新西兰	77	—	1	2	6
39.	塞尔维亚一黑山	75	—	—	3	6
40.	比利时	74	—	1	1	6
41.	奥地利	74	—	—	2	6
42.	瑞士	70	—	1	1	6
43.	印尼	70	—	—	3	6
44.	丹麦	69	—	—	4	6
45.	爱沙尼亚	68	—	—	3	6
46.	阿根廷	65	—	1	2	6
47.	荷兰	62	—	—	2	6
48.	拉脱维亚	62	—	—	2	6
49.	阿塞拜疆	59	—	—	2	6
50.	希腊	58	—	—	2	6
51.	爱尔兰	55	—	1	—	6
52.	古巴	54	—	—	3	4
53.	立陶宛	53	—	—	1	6
54.	马其顿	50	—	—	2	6
55.	斯洛文尼亚	49	—	1	—	6
56.	波斯尼亚一黑塞哥维那	49	—	—	2	6
57.	芬兰	49	—	—	2	6
58.	吉尔吉斯斯坦	46	—	—	2	6
59.	西班牙	46	—	—	1	6
60.	阿尔巴尼亚	44	—	1	—	6
61.	瑞典	42	—	—	—	6
62.	南非	39	—	—	—	6
63.	中国澳门	38	—	—	1	6
64.	挪威	38	—	—	—	6
65.	乌拉圭	37	—	—	1	5
66.	哥斯达黎加	37	—	—	—	6
67.	斯里兰卡	32	—	—	1	6
68.	菲律宾	30	—	—	—	6

续表

名次	国家或地区	分数 （满分 252）	奖牌 金牌	 银牌	 铜牌	参赛队 人数
69.	葡萄牙	27	—	—	—	6
70.	萨尔瓦多	25	—	—	—	6
71.	冰岛	23	—	—	1	6
72.	土库曼斯坦	18	—	—	1	3
73.	摩洛哥	18	—	—	—	6
74.	厄瓜多尔	17	—	—	1	6
75.	马来西亚	15	—	—	—	6
76.	委内瑞拉	15	—	—	—	2
77.	塞浦路斯	14	—	—	—	6
78.	特立尼达一多巴哥	13	—	—	—	6
79.	巴拉圭	12	—	—	—	6
80.	巴基斯坦	11	—	—	—	3
81.	突尼斯	9	—	—	—	3
82.	波多黎各	8	—	1	—	6
83.	危地马拉	6	—	—	—	3
84.	列支敦士登	4	—	—	—	3
85.	科威特	3	—	—	—	5
86.	卢森堡	3	—	—	—	2
87.	塔吉克斯坦	3	—	—	—	3
88.	孟加拉国	3	—	—	—	6
89.	沙特阿拉伯	3	—	—	—	6
90.	莫桑比克	2	—	—	—	5
91.	玻利维亚	0	—	—	—	2

第 46 届国际数学奥林匹克预选题

墨西哥,2005

代数部分

1 求所有次数为 2 且首项系数为 1 的整系数多项式 $P(x)$,使得存在一个整系数多项式 $Q(x)$,满足 $P(x)Q(x)$ 的所有系数均为 ± 1.

解 $P(x)=x^2\pm x\pm 1, x^2\pm 1, x^2\pm 2x+1$.

设 $F(x)$ 是任意的一个 n 次多项式,其系数均为 ± 1. 若 z 是 $F(x)$ 的一个根,且 $|z|>1$,则

$$|z|^n=|z^n|=|\pm z^{n-1}\pm z^{n-2}\pm\cdots\pm 1|\leqslant$$
$$|z|^{n-1}+|z|^{n-2}+\cdots+1=\frac{|z|^n-1}{|z|-1}$$

于是,有

$$|z|^n(|z|-2)\leqslant -1$$

因此

$$|z|<2$$

从而,$F(x)$ 的所有根的模均小于 2.

设

$$P(x)=x^2+ax\pm 1$$

其中 a 为整数,x_1,x_2 是它的两个根,则

$$x_1x_2=\pm 1$$

不妨设

$$|x_1|\geqslant 1,\ |x_2|\leqslant 1$$

因 x_1,x_2 也是 $P(x)Q(x)$ 的根,且 $P(x)Q(x)$ 的系数均为 ± 1,所以

$$|x_1|<2$$

于是,有

$$|a|=|x_1+x_2|\leqslant|x_1|+|x_2|<3$$

即

$$a\in\{\pm 2,\pm 1,0\}$$

当 $a=\pm 1$ 时,取

$$Q(x)=1$$

当 $a=0$ 时,取

$$Q(x)=x+1$$

当 $a=\pm 2$ 时,多项式 $x^2\pm 2x-1$ 有一个根的绝对值大于 2,不满足题设要求,若

$$P(x)=x^2\pm 2x+1$$

取

$$Q(x)=x\mp 1$$

2 设 $\mathbf{R}_+$ 表示正实数集.求所有的函数 $f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$,使得对所有正实数 x,y,有

$$f(x)f(y)=2f(x+yf(x))$$

解 $f(x)=2$.

首先证明:函数 $f(x)$ 是单调不减的.

若有正实数 $x>z$,使得

$$f(x)<f(z)$$

设

$$y=\frac{x-z}{f(z)-f(x)}>0$$

则

$$x+yf(x)=z+yf(z)$$

于是

$$f(x)f(y)=2f(x+yf(x))=2f(z+f(z))=f(z)f(y)$$

即

$$f(x)=f(z)$$

矛盾.

若 $f(x)$ 不是严格增加的,则存在正实数 $x>z$,使得

$$f(x)=f(z)$$

若

$$y\in(0,\frac{x-z}{f(x)}]$$

则

$$z<z+yf(z)\leqslant x$$

因为 f 是单调不降的,所以

$$f(z)\leqslant f(z+yf(z))\leqslant f(x)=f(z)$$

从而

$$f(z+yf(z))=f(z)$$

进而,有

$$f(z)f(y)=2f(z+yf(z))=2f(z)$$

即

$$f(y)=2, y\in\left(0,\frac{x-z}{f(x)}\right]$$

若存在 y_0,使得

$$f(y_0)=2$$

则

$$2\times 2=f(y_0)f(y_0)=2f(y_0+y_0f(y_0))=2f(3y_0)$$

所以

$$f(3y_0)=2$$

由数学归纳法易得,对于所有的正整数 k,有

$$f(3^k y_0)=2$$

由于满足 $f(y)=2$ 的 $y\in\left(0,\frac{x-z}{f(x)}\right]$,所以,对于所有 $x\in\mathbf{R}_+$,有

$$f(x)=2$$

若 $f(x)$ 是严格递增函数,则对于所有正实数 x,y,有

$$f(x)f(y)=2f(x+yf(x))>2f(x)$$

于是

$$f(y)>2$$

又因为对于所有的 $x>0$,有

$$2f(x+1\cdot f(x))=f(x)f(1)=f(1)f(x)=2f(1+xf(1))$$

由 $f(x)$ 的严格单调性,可知

$$x+1\cdot f(x)=1+xf(1)$$

即

$$f(x)=x(f(1)-1)+1$$

取足够小的 x,可使 $f(x)<2$,与对于所有的 $y>0$ 都有 $f(y)>2$ 矛盾.

综上所述,满足条件的 $f(x)=2$.

3 已知实数 p,q,r,s 满足

$$p+q+r+s=9, p^2+q^2+r^2+s^2=21$$

证明:存在(p,q,r,s) 的一个排列(a,b,c,d),使得

$$ab-cd\geqslant 2$$

证明 假设

$$p\geqslant q\geqslant r\geqslant s$$

若

$$p+q\geqslant 5$$

则

$$p^2+q^2+2pq \geqslant 25 =$$
$$4+(p^2+q^2+r^2+s^2) \geqslant$$
$$4+p^2+q^2+2rs$$

即

$$pq-rs \geqslant 2$$

若

$$p+q<5$$

则

$$4<r+s \leqslant p+q<5$$

注意到

$$(pq+rs)+(pr+qs)+(ps+qr)=$$
$$\frac{1}{2}[(p+q+r+s)^2-(p^2+q^2+r^2+s^2)]=30$$

因为

$$(p-s)(q-r) \geqslant 0,(p-q)(r-s) \geqslant 0$$

所以

$$pq+rs \geqslant pr+qs \geqslant ps+qr$$

因此,有

$$pq+rs \geqslant 10$$

又因为

$$0 \leqslant (p+q)-(r+s)<1$$

所以

$$(p+q)^2-2(p+q)(r+s)+(r+s)^2<1$$

结合

$$(p+q)^2+2(p+q)(r+s)+(r+s)^2=9^2$$

得

$$(p+q)^2+(r+s)^2<41$$

于是

$$41=21+2\times 10 \leqslant (p^2+q^2+r^2+s^2)+2(pq+rs)=$$
$$(p+q)^2+(r+s)^2<41$$

矛盾.

4 求所有的函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,对于所有实数 x,y,满足

$$f(x+y)+f(x)f(y)=f(xy)+2xy+1$$

解 $f(x)=2x-1,f(x)=-x-1,f(x)=x^2-1.$

在原方程中,设 $y=1$,且设

$$a=1-f(1)$$

则有

$$f(x+1)=af(x)+2x+1$$

在原方程中，将 y 变为 $y+1$，得

$$f(x+y+1)+f(x)f(y+1)=$$
$$f(x(y+1))+2x(y+1)+1$$

将

$$f(x+y+1)=af(x+y)+2(x+y)+1$$
$$f(y+1)=af(y)+2y+1$$

代入得

$$a(f(x+y)+f(x)f(y))+$$
$$(2y+1)(1+f(x))=$$
$$f(x(y+1))+2xy+1$$

再次利用原方程，可得

$$a(f(xy)+2xy+1)+$$
$$(2y+1)(1+f(x))=$$
$$f(x(y+1))+2xy+1$$

设

$$x=2t, y=-\frac{1}{2}$$

则有

$$a(f(-t)-2t+1)=f(t)-2t+1$$

用 $-t$ 代替上式中的 t，得

$$a(f(t)+2t+1)=f(-t)+2t+1 \quad ①$$

消去 $f(-t)$，得

$$(1-a^2)f(t)=2(1-a)^2t+a^2-1$$

其中，$a\neq-1$，否则对于所有的 t，有 $8t=0$，矛盾.

若 $a\neq 1$，则

$$1-a^2\neq 0$$

所以

$$f(t)=2\left(\frac{1-a}{1+a}\right)t-1$$

令 $t=1$，得

$$1-a=2\left(\frac{1-a}{1+a}\right)-1$$

从而，$a=0$ 或 $a=3$.

当 $a=0$ 时，得

$$f(t)=2t-1$$

当 $a=3$ 时，得

$$f(t)=-t-1$$

当 $a=1$，由式 ① 可得

$$f(t)=f(-t)$$

在原方程中分别设 $y=x$ 和 $y=-x$，得

$$f(2x)+f^2(x)=f(x^2)+2x^2+1$$

$$f(0)+f^2(x)=f(x^2)-2x^2+1$$

两式相减得

$$f(2x)=4x^2+f(0)$$

在

$$f(x+1)=af(x)+2x+1$$

中，令 $x=0$，得

$$f(1)=af(0)+1$$

因为

$$a=1,f(1)=1-a=0$$

所以

$$f(0)=-1$$

于是

$$f(2x)=4x^2-1$$

因此，对于所有 $x\in\mathbf{R}$，有

$$f(x)=x^2-1$$

5 正实数 x,y,z 满足 $xyz\geqslant 1$. 证明

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geqslant 0$$

证明 此题答案与本届 IMO 试题的第 3 题答案相同.

组合部分

1 一幢房子有偶数盏灯分布在若干个房间内，每个房间内至少有 3 盏灯. 每盏灯恰和另外一盏灯共用一个开关(不一定是同一个房间中的灯). 每改变一次开关的状态，共用这个开关的两盏灯同时改变它们的开关状态. 证明：对于一个初始状态，都存在有限次操作，使得每个房间中的灯既有开着的，又有关着的.

证明 将共用一个开关的两盏灯称为“双胞胎”. 若一个房间的灯有些是开着的、有些是关着的，则称这个房间是“正常的”. 为此，设计一种操作次序，使得这幢房子中正常的房间的数目是增加的. 从而，经过有限次操作，能使所有的房间都是正常的.

任选一个非正常的房间 R_0，不妨假设房间 R_0 中的所有的灯

都是关着的.

如果在房间 R_0 中有一对双胞胎,则操作一次,能使这两盏灯开着.房间 R_0 成为正常的.

若在房间 R_0 中没有双胞胎,任选一盏灯 $a_0 \in R_0$,设与其构成双胞胎的另一盏灯 $b_0 \in R_1$.改变开关的状态,则房间 R_0 成为正常的.若房间 R_1 仍为正常的,则正常的房间的数目增加了.否则,房间 R_1 中的灯的开关的状态全相同.

与前面类似,假设在房间 R_1 中没有双胞胎.任选一盏不同于 b_0 的灯 $a_1 \in R_1$,设与其构成双胞胎的另一盏灯 $b_1 \in R_2$.改变这两盏灯的开关状态,使房间 R_1 为正常的.若房间 R_2 也为正常的,则正常的房间的数目增加了.否则,继续进行类似的操作,直到出现循环为止.

假设不同的房间分别为

$$R_0, R_1, \cdots, R_m$$

房间 R_i 和房间 R_{i+1} 是由一对双胞胎 a_i 和 b_i 相关联的,其中

$$a_i \in R_i, b_i \in R_{i+1}, i=0,1,\cdots,m-1$$

且有一盏灯 $a_m \in R_m (a_m \neq b_{m-1})$,与其构成双胞胎的另一盏灯 b_m 属于某个房间 $R_k (0 \leqslant k \leqslant m-1)$.若这个操作过程到 a_m 和 b_m,则房间 R_m 是正常的.

若 $k \geqslant 1$,则房间 R_k 中有两盏灯前面曾经分别改变过开关的状态,它们分别为 b_{k-1} 和 a_k,与它们构成双胞胎的另外两盏灯分别为 a_{k-1} 和 b_k,所以,b_m 不是 b_{k-1} 和 a_k.当我们第一次考虑房间 R_k 时,改变 b_{k-1} 时,使房间 R_k 不正常,改变 a_k 时,使房间 R_k 变为正常的,因此,b_{k-1} 与 a_k 的状态不同.故不管 b_m 是怎样的状态,房间 R_k 均为正常的.所以,正常的房间的数目增加了.

若 $k=0$,则

$$b_m \in R_0, b_m \neq a_0$$

这是因为 a_0 与 b_0 是双胞胎.因为每个房间至少有3盏灯,所以,存在

$$c \in R_0, c \neq a_0, c \neq b_m$$

由于开始时 c 是关着的,而对 a_0 进行一次操作后,a_0 是开着的,故不管 b_m 是怎样的状态,房间 R_0 均为正常的.所以,正常的房间的数目增加了.

❷ 设 k 是一个固定的正整数. 一个公司用下面的方法卖帽子,每个买了帽子的顾客可以说服两个人去买帽子,其中,这两个人未曾被其他人说服过. 每个新的顾客又可以说服两个其他的人去买帽子. 如果某人说服的两个人中的每一个人都至少说服了 k 个人买了帽子(直接或间接),则这个人赢得一台免费的学习机. 证明:若 n 个人买了帽子,则最多有 $\frac{n}{k+2}$ 个人得到学习机.

证明 首先考虑,若 w 个人得到了学习机,那么,买帽子的人的数目 n 的最小值是多少?

当 $w=1$ 时,n 的最小值为

$$2k+3=1\cdot(k+2)+(k+1)$$

当 $w=2$ 时,n 的最小值为

$$3k+5=2(k+2)+(k+1)$$

下面用数学归纳法证明

$$n\geqslant w(k+2)+(k+1) \quad ①$$

若 P 直接或间接地说服了 Q 买了帽子,或 $Q=P$,则称 P"影响"了 Q. 若某个人除了自己不被其他人影响,则称该人影响的人的集合为一个分支. 一个分支中没有人可以影响到另外一个分支中的人. 因此,只要对每个分支证明式 ① 成立即可.

实际上,若式 ① 对于 r 个分支成立,设第 i 个分支有 n_i 个人,w_i 个获奖的人($i=1,2,\cdots,r$),则

$$n=\sum_{i=1}^{r}n_i,w=\sum_{i=1}^{r}w_i$$

且

$$\begin{aligned}n=\sum_{i=1}^{r}n_i\geqslant\sum_{i=1}^{r}[w_i(k+2)+(k+1)]\Rightarrow\\(\sum_{i=1}^{r}w_i)(k+2)+r(k+1)\geqslant\\w(k+2)+(k+1)\end{aligned}$$

假设所有的人是一个分支,则所有的人都被一个人 A 影响了. 要证明式 ①,只需证明有 w 个获奖的人的分支 G 中,关于 n 的最小值成立. 于是,A 是一个获奖者. 否则去掉他,分支 G 中的获奖者在新的集合 G' 中还是获奖者,w 没有改变,n 变小了,矛盾.

当 $w=1$ 时,则获得学习机的人只可能是 A. 他说服了两个人 B,C 买了帽子,则 B,C 各直接或间接地说服了至少 k 个人,且被 B 说服的人与被 C 说服的人没有相同的. 因此

$$n\geqslant 2k+3$$

假设式 ① 对于小于 w 个获奖者成立，当有 w 个获奖者时，这些获奖者都被一个人 A 影响，则 A 一定是获奖者.

设 A 直接说服的两个人分别为 B,C，被 B 影响的人的数目为 n_B，这些人中获得学习机的人的数目为 w_B. 类似地，定义 n_C,w_C.

由归纳假设，若 $w_B>0$，则

$$n_B \geqslant w_B(k+2)+(k+1)$$

若 $w_B=0$，由于 A 是获奖者，则

$$n_B \geqslant w_B(k+2)+(k+1)$$

同理

$$n_C \geqslant w_C(k+2)+(k+1)$$

因为

$$n=n_B+n_C+1$$
$$w=w_B+w_C+1$$

所以

$$n \geqslant w(k+2)+(k+1)$$

综上所述，最多有 $\frac{n}{k+2}$ 个人得到学习机.

3 已知 $m\times n$ 的方格表. 若两个单位正方形有公共边，则称这两个正方形“相邻”. 如果有若干个单位正方形可以排成一个序列，使得这个序列中任意两个连续排列的正方形都是相邻的，则称这个单位正方形序列为一条“通路”.

将方格表中的每个正方形染为黑色或白色. 设 N 是使得至少有一条从方格表左端边到右端边的黑色通路的染色方法的数目，M 是使得至少存在两条不相交的、从方格表最左边到最右边的黑色通路的另一种染色方法的数目. 证明：$N^2 \geqslant 2^{mn}M$.

证明 首先证明一个更一般的结论.

假设每个单位正方形的上下两边是考虑的对象，一些单位正方形是透明的，其他是不透明的. 一个透明的单位正方形只染一条边，它从上和从下看都是一样的. 不透明的单位正方形必须染两条边(同色或不同色).

设 A 是满足从上面看至少有一条从方格表左端到右端的黑色通路的染色方法的集合，同样，设 B 是满足从下面看至少有一条从方格表左端到右端的黑色通路的染色方法的集合，C 是满足从上、下看到至少有两条从左端到右端的黑色通路且这两条通路在任何透明的正方形处不相交的染色方法的集合，D 表示所有染色方法的集合. 下面证明

$$|A|\cdot|B|\geqslant|C|\cdot|D| \quad ①$$

其中,原命题即为所有正方形都是透明的,且有

$$|A|=|B|=N,\ |C|=M,\ |D|=2^{mn}$$

对透明的正方形的数目 k,用数学归纳法证明式 ①.

当 $k=0$ 时

$$|A|=|B|=2^{mn}N$$

$$|C|=N^2,\ |D|=(2^{mn})^2$$

式 ① 的等号成立.

假设式 ① 对 k 成立,下面考虑 $k+1$ 的情形.

设 A,B,C,D 是如上定义的集合. 选择一个透明的正方形 a,若设 A',B',C',D' 分别为 a 变为不透明时相应的集合,由归纳假设有

$$|A'|\cdot|B'|\geqslant|C'|\cdot|D'| \quad ②$$

当 a 变为透明时,有

$$|D'|=2|D|$$

对于 A 中的任何一种染法,对应着 A' 中的两种染法,即从下面看 a 染为黑色和白色,且是一一对应的,所以

$$|A'|=2|A|$$

同理

$$|B'|=2|B|$$

由式 ②,只需证明

$$|C'|\geqslant 2|C|$$

在 C 中任取一种染法,它包含两条黑色通路(从上和从下看),且在透明的正方形处不相交. 由于 a 是透明的,a 最多在其中的一条通路上,不妨设在上面的通路上,当 a 变为不透明时,保持上面的边的颜色,而下面的边有两种可能的染色方法,则这两种染法在 C' 中. 于是,有

$$|C'|\geqslant 2|C|$$

从而,式 ② 成立.

4 已知正整数 $n(n\geqslant 3)$. 将正 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的每条边和每条对角线标上一个不超过 r 的正整数,且满足:

① 每个正整数 $1,2,\cdots,r$ 都出现在边或对角线所标的数中;

② 每个 $\triangle P_iP_jP_k$ 中,有两条边标的数相等,且大于第三条边上标的数.

求:(1) 满足上述条件的最大正整数 r;

(2) 对于这个最大值 r,满足上述条件的标法有多少种?

解　称满足条件 ② 的标法为"好的"，满足条件 ① 和 ② 的标法为"非常好的"，并将多边形的对角线和边统称为边，边上所标的数称为两点间的距离.

设标最大值 r 的边为 AB，C 是不同于 A，B 的顶点.

由条件 ② 可知，AC，BC 中有一条边标的数为 r，另一条边标的数小于 r. 于是，将所有顶点分为两组，第一组包含到点 A 的距离为 r 的顶点(特别地，点 B 在这一组)，第二组包含到点 B 的距离为 r 的顶点(特别地，点 A 在这一组).

设 X 为第一组中不同于点 B 的顶点，Y 为第二组中不同于点 A 的顶点. 在 $\triangle AXY$ 中，由于 AY 标的不是 r，AX 标的是 r，所以，XY 标的是 r，即第一组中的任意一个顶点与第二组中的任意一个顶点所连的边上标的数均为 r.

若 X，Y 为第一组中的任意两个点，在 $\triangle AXY$ 中，由于 AX，AY 标的数为 r，则 XY 上标的数小于 r.

同理，第二组中的任意两个点所连的边上标的数也都小于 r.

好的标法应该满足下述要求：第一组中任意一点与第二组中任意一点所连的边标的数为最大值 r，且每组中标法是好的标法，同时，每条边上标的数小于 r.

(1) 用数学归纳法证明：r 的最大值为 $n-1$.

当 $n=3$ 时，易知 $r=2$，结论成立.

假设结论对于小于 $n(n>3)$ 的正整数成立.

对 n 边形 P，将顶点分成两组，不妨设第一组中有 k 个顶点，第二组中有 $n-k$ 个顶点. 由归纳假设，第一组中的 k 个顶点构成的 k 边形 P_1 的每条边上标的数最多有 $k-1$ 个(不一定是从 1 到 $k-1$).

同理，第二组中的 $n-k$ 个顶点构成的 $n-k$ 边形 P_2 的每条边上标的数最多有 $n-k-1$ 个(不一定是从 1 到 $n-k-1$). 而第一组与第二组的点之间所连的边上标的数都相同，且是最大值，所以，最多有

$$(k-1)+(n-k-1)+1=n-1$$

个不同的数. 例如，若 $n-1$ 边形有非常好的标法，r 的最大值为 $n-2$，则将 n 边形的第 n 个顶点与 $n-1$ 边形中的每个顶点所连的边上都标上 $n-1$，即为满足条件的非常好的标法.

(2) 设 $f(n)$ 是将 n 边形 P 用 $1,2,\cdots,n-1$ 标在每条边上的非常好的标法的数目.

下面用数学归纳法证明

$$f(n)=\frac{n!\ (n-1)!}{2^{n-1}}$$

当 $n=3$ 时，$f(3)=3$，结论成立.

假设对于 $k<n$ 时，有

$$f(k)=\frac{k!\ (k-1)!}{2^{k-1}}$$

对 n 边形 P，将 n 个顶点分为非空的两组，第一组中有 k 个顶点，共有 C_n^k 种分法. 第一组中的每个顶点与第二组中的每个顶点所连的边上必须标数 $n-1$，则在 $1,2,\cdots,n-2$ 中选出 $k-1$ 个数，用在由第一组中的点组成的 k 边形 P_1 的边上，共有 C_{n-2}^{k-1} 种选法. 剩下的 $n-k-1$ 个数标在由第二组中的点组成的 $n-k$ 边形 P_2 的边上，且 P_1 的非常好的标法有 $f(k)$ 种，P_2 的非常好的标法有 $f(n-k)$ 种.

由于选取 k 个点作为第一组等价于选取余下的 $n-k$ 个点作为第一组，则每种非常好的标法被计算了两次. 有

$$f(n)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}C_n^kC_{n-2}^{k-1}f(k)f(n-k)=$$

$$\frac{n!\ (n-1)!}{2(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(k)}{k!\ (k-1)!}\cdot\frac{f(n-k)}{(n-k)!\ (n-k-1)!}=$$

$$\frac{n!\ (n-1)!}{2(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k-1}}\cdot\frac{1}{2^{n-k-1}}=$$

$$\frac{n!\ (n-1)!}{2^{n-1}}$$

综上所述，有

$$f(n)=\frac{n!\ (n-1)!}{2^{n-1}}$$

5 有 n 张书签，每张书签一面为白色，另一面为黑色. 将它们排成一排，且所有的书签的白色一面朝上. 每次操作（如果可能的话）是拿掉一张白色的面朝上的书签（非最靠边的书签），并将与这张书签相邻的两张书签翻到另一面. 证明：能够使得只剩下两张书签的充分必要条件是 $n-1$ 不能被 3 整除.

证明　将白色的面朝上的书签称为“白书签”，反之称“黑书签”，则黑书签的数目的奇偶性不变. 因此，若只剩下两张书签，这两张书签一定同色.

若一张白书签的左边有 t 张黑书签，则在白书签上放置一个数 $(-1)^t$（只在白书签上放置数）.

设 s 是白书签上放置的数的和模 3 的余数，下面证明：在可能的操作下，s 是不变量.

选择一个白书签 W，且拿掉 W 之前，其左边有 t 张黑书签. 若

W 的两个相邻的书签均为黑书签，拿掉 W 后，白书签上放置的数的和增加了

$$-(-1)^t+(-1)^{t-1}+(-1)^{t-1}=3(-1)^{t-1}$$

因此，s 没有改变.

类似地，可以证明：当 W 的左右两个相邻的书签分别为同白、一黑一白、一白一黑时，仍满足 s 的值不变.

若最后剩下两张书签，当剩下的是两张白书签时，$s=2$；当剩下的是两张黑书签时，$s=0$.

因为开始时是 n 张白书签，则

$$s\equiv n(\mathrm{mod}\ 3)$$

因此

$$n\equiv 0,2(\mathrm{mod}\ 3)$$

即 $n-1$ 不能被 3 整除.

若 $n-1$ 不能被 3 整除，当 $n\geqslant 5$ 时，每次选择最左边的可以进行操作的白书签，连续进行 3 次操作，则剩下 $n-3$ 张白书签，没有黑书签. 而当 $n=2,3$ 时，能够剩下两张书签.

6 某次数学竞赛共有 6 道试题，其中任意两道试题都被超过 $\frac{2}{5}$ 的参赛者答对了. 但没有一个参赛者能答对所有的 6 道试题. 证明：至少有两个参赛者都恰好答对了 5 道试题.

证明 此题答案与本届 IMO 试题的第 6 题答案相同.

7 已知正整数 $n(n>1)$，整数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足

$$n\mid(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

证明：存在 $1,2,\cdots,n$ 的两个排列 σ,τ，使得对于所有的 $i=1,2,\cdots,n$，有

$$\sigma(i)+\tau(i)\equiv a_i(\mathrm{mod}\ n)$$

证明 假设存在满足条件的排列 σ,τ. 若整数列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 满足

$$n\mid(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

且 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 与 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 只有两个下标 i_1,i_2 模 n 的余数不同，则对于每个 $i\neq i_1,i_2$，有

$$\sigma(i)+\tau(i)\equiv b_i(\mathrm{mod}\ n) \quad ①$$

下面变换 σ 和 τ 到恰当的排列，使得对于 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，式 ① 均成立.

假设所有的余数都是在模 n 意义下的余数. 首先构造一个图

表(图 46.10).

$$\begin{array}{ccc}
\sigma(i_1) & -b_{i_1} & \tau(i_1) \\
\sigma(i_2) & -b_{i_2} & \tau(i_2) \\
\sigma(i_3) & -b_{i_3} & \tau(i_3) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\sigma(i_{p-1}) & -b_{i_{p-1}} & \tau(i_{p-1}) \\
\sigma(i_p) & \boxed{-b_{i_p}} & \boxed{\tau(i_p)} \\
\sigma(i_{p+1}) & -b_{i_{p+1}} & \boxed{\tau(i_{p+1})} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\boxed{\sigma(i_{q-1})} & -b_{i_{q-1}} & \tau(i_{q-1}) \\
\boxed{\sigma(i_q)} & \boxed{-b_{i_q}} & \tau(i_q)
\end{array}$$

题 46.10

每行是有相同的次序的三元数组

$$T_i=(\sigma(i),-b_i,\tau(i)),i=1,2,\cdots,n$$

前两行分别为 T_{i_1},T_{i_2}.

因 σ 和 τ 是 $1,2,\cdots,n$ 的排列,则存在唯一的 i_3,使得

$$\sigma(i_1)+\tau(i_3)\equiv b_{i_2}$$

在第三行写下 T_{i_3},存在唯一的 i_4,使得

$$\sigma(i_2)+\tau(i_4)\equiv b_{i_3}$$

在第四行写下 T_{i_4}.

如此下去,直到第1列确定的数出现两次,不妨设为第 p 行确定的 i_p 和第 q 行确定的 i_p,$p<q$,且有

$$i_p=i_q$$

下面证明:$p=1$ 或 $p=2$.

若 $p>2$,考虑从第 p 行到第 q 行.由于每行的和模 n 余零,且从左上到右下的对角线上的三个数的和也模 n 余零.因此,有

$$-b_{i_p}+\tau(i_p)+\tau(i_{p+1})+\sigma(i_{q-1})+\sigma(i_q)-b_{i_q}\equiv 0$$

由于 $i_p=i_q$,所以

$$b_{i_q}\equiv\sigma(i_q)+\tau(i_p)$$

又因为

$$\sigma(i_{p-1})-b_{i_p}+\tau(i_{p+1})\equiv 0$$

所以

$$\sigma(i_{p-1})=\sigma(i_{q-1})$$

从而,有

$$i_{p-1}=i_{q-1}$$

矛盾.因此

$$p=1 \text{ 或 } p=2$$

删去第 q 行,将第1列和第3列分别周期性地向下和向上移动

一个位置，则所得到的图表（图 46.11）的每一行的和模 n 余零，除了第 1 行的和与最后一行的和可能模 n 不余零.

$$\begin{array}{cccccc}
\sigma(i_{q-1}) & -b_{i_1} & \tau(i_2) & \sigma(i_{q-1}) & -b_{i_1} & \tau(i_1) \\
\sigma(i_1) & -b_{i_2} & \tau(i_3) & \sigma(i_1) & -b_{i_2} & \tau(i_3) \\
\sigma(i_2) & -b_{i_3} & \tau(i_4) & \sigma(i_2) & -b_{i_3} & \tau(i_4) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\sigma(i_{q-3}) & -b_{i_{q-2}} & \tau(i_{q-1}) & \sigma(i_{q-3}) & -b_{i_{q-2}} & \tau(i_{q-1}) \\
\sigma(i_{q-2}) & -b_{i_{q-1}} & \tau(i_1) & \sigma(i_{q-2}) & -b_{i_{q-1}} & \tau(i_2) \\
 & (p=1) & & & (p=2) &
\end{array}$$

图 46.11

当 $p=1$ 时，最后一行的和模 n 也余零（因为 $i_p=i_q=i_1$，$\sigma(i_{q-2})-b_{i_{q-1}}+\tau(i_q)\equiv 0$）；

当 $p=2$ 时，再将第 3 列中的 $\tau(i_2)$ 和 $\tau(i_1)$ 进行交换. 因为

$$i_p=i_q=i_2$$

则最后一行的和模 n 也余零.

当 $p=1$ 和 $p=2$ 时，第 1 列和第 3 列分别是

$$\sigma(i_1),\sigma(i_2),\cdots,\sigma(i_{q-1})$$

和

$$\tau(i_1),\tau(i_2),\cdots,\tau(i_{q-1})$$

的一个排列. 将不包含在上面构造的三元数组排在其后，分别得到第 1 列和第 3 列关于 $1,2,\cdots,n$ 的排列 σ' 和 τ'，满足对于所有的 $i\neq i_1$，有

$$\sigma'(i)+\tau'(i)\equiv b_i$$

由于

$$\sum_{i=1}^{n}(\sigma'(i)+\tau'(i))\equiv 0\equiv\sum_{i=1}^{n}b_i$$

所以

$$\sigma'(i_1)+\tau'(i_1)\equiv b_{i_1}$$

因为结论对于常数（整数）列是正确的，且其和模 n 的余数为零，于是，每次调整两个数，即可得到对于任意满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\equiv 0 \pmod n$$

的数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，均存在 σ,τ，使得

$$\sigma(i)+\tau(i)\equiv a_i \pmod n, i=1,2,\cdots,n$$

8 已知凸 $n(n\geqslant 4)$ 边形 M，将其中的 $n-3$ 条对角线染为绿色，另外的 $n-3$ 条对角线染为红色，使得同色的对角线在 M 的内部不相交. 求在 M 的内部，红色的对角线与绿色的对角线的交点数目的最大值.

解 容易得到凸n边形中最多有$n-3$条对角线，满足任意两条对角线在凸n边形内部不相交，这$n-3$条对角线将凸n边形分割为$n-2$个三角形，且至少有两个顶点没有引出对角线，因此，至少有两条对角线从n边形上切割下的是三角形.

对于任意对角线d，记$f(d)$为d上红色对角线与绿色对角线的交点的数目. 对于任意一对绿色的对角线d和d'，假设在d与d'之间的M的顶点（包括d和d'的端点）有k个，余下的$n-k$个点构成一个凸多边形$A\cdots BC\cdots D$，其中，A，B是与d的顶点相邻，且不在如上k个顶点中的M的顶点，C，D是与d'的顶点相邻，且也不在如上k个顶点中的M的顶点，A，B可能重合，C，D也可能重合.

设多边形$A\cdots BC\cdots D$内红色线段的数目为m.

因为$n-k$边形至多有$n-k-3$条不相交的对角线，所以，有

$$m\leqslant(n-k-3)+2$$

其中，包括AD和BC也可能是红色的.

这m条红色对角线中的每一条最多与d和d'都有交点，而余下的$n-3-m$条中的每一条对角线最多与d和d'之一有交点. 于是，有

$$\begin{aligned}f(d)+f(d')\leqslant 2m+(n-3-m)=\\ n-3+m\leqslant\\ n-3+n-k-1=\\ 2n-k-4\end{aligned}$$

任取两条绿色的对角线，使得这两条对角线能从n边形M中切割下三角形，将这两条对角线d_1，d_2作为第一对对角线；再选取两条绿色的对角线，能从剩下的$n-2$边形中切割下三角形，设为d_3，d_4并作为第二对对角线，……，d_{2r-1}，d_{2r}作为第r对绿色的对角线. 如果$n-3$为奇数，则最后剩下一条绿色的对角线.

第r对对角线后，多边形化为$n-2r$个顶点的多边形，其中，有两条边是成对的，即为d_{2r-1}，d_{2r}，其他的边要么是M的边，要么是绿色的对角线

$$d_1,d_2,\cdots,d_{2r-2}$$

因为不在d_{2r-1}和d_{2r}内部（包括d_{2r-1}和d_{2r}的端点）且属于M的顶点最多有$2r$个，所以，d_{2r-1}和d_{2r}内部（包括d_{2r-1}和d_{2r}的端点）且属于M的顶点的数目

$$k_r\geqslant n-2r$$

由前面得到的结论，有

$$f(d_{2r-1})+f(d_{2r})\leqslant 2n-k_r-4\leqslant n+2r-4$$

若$n-3$为偶数，则d_1，d_2，…，d_{n-3}均为绿色的对角线；若$n-3$为奇数，则最后一条未成对的绿色对角线最多可以与$n-3$条红

色对角线相交.

设

$$n-3=2l+\varepsilon,\varepsilon\in\{0,1\}$$

则所求交点的数目不超过

$$\sum_{r=1}^{l}(n+2r-4)+\varepsilon(n-3)=$$

$$l(2l+\varepsilon-1)+l(l+1)+\varepsilon(2l+\varepsilon)\Rightarrow$$

$$3l^2+\varepsilon(3l+\varepsilon)=\left[\frac{3}{4}(n-3)^2\right]$$

其中,$[t]$ 表示不小于 t 的最小整数.

特别地,当 $n=4$ 时,和式 $\sum_{r=1}^{0}$ 无意义,定义为 0.

下面的例子说明这个值是可以取到的.

设 PQ 和 RS 是 M 的两条边,对角线 QR 和 PS 不在 M 内相交,且满足下面的条件:设 U 为在 Q,R 之间的 M 的边界($S,P\notin U$),V 为在 P,S 之间的 M 的边界,则 M 在 U 上和在 V 上的顶点的数目的差的绝对值不超过 1.

将下列对角线染为绿色:对角线 PR,联结 P 与 U 中顶点及 R 与 V 中顶点的所有对角线.

将下列对角线染为红色:对角线 QS,联结 Q 与 V 中顶点及 S 与 U 中顶点的所有对角线.

当 $n=2k$ 时,交点的数目为

$$(k-1)+k+\cdots+(2k-4)+(2k-3)+$$
$$(2k-4)+\cdots+k+(k-1)\Rightarrow$$
$$(2k-3)+[(k-1)+(2k-4)][(2k-4)-(k-1)+1]\Rightarrow$$
$$3k^2-9k+7=\left[\frac{3}{4}(n-3)^2\right]$$

当 $n=2k-1$ 时,交点的数目为

$$(k-1)+k+\cdots+(2k-5)+(2k-4)+$$
$$(2k-5)+(2k-6)+\cdots+(k-1)+(k-2)\Rightarrow$$
$$\frac{(3k-5)(k-2)}{2}+\frac{(3k-7)(k-2)}{2}\Rightarrow$$
$$3k^2-12k+12\Rightarrow\left[\frac{3}{4}(n-3)^2\right]$$

综上所述,满足条件的交点的最大值为

$$\left[\frac{3}{4}(n-3)^2\right]$$

几何部分

❶ 已知 $\triangle ABC$ 满足 $AB+BC=3AC$，I 为 $\triangle ABC$ 的内心，内切圆与边 AB，BC 的切点分别为 D，E. 点 D，E 关于点 I 的对称点分别为 K，L. 证明：A，C，K，L 四点共圆.

证明 如图 46.12，设 BI 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 P，M 为边 AC 的中点，点 P 在 IK 上的投影为 N.

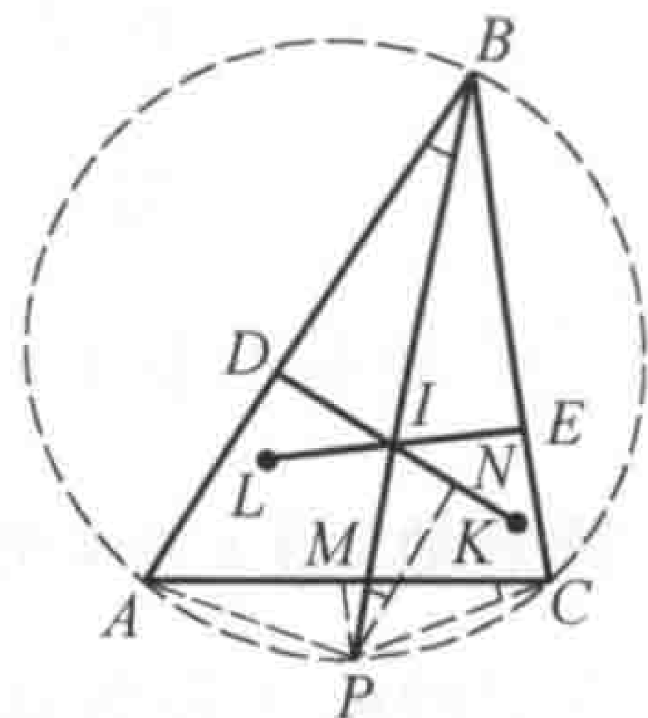


图 46.12

因为

$$AB+BC=3AC$$

所以

$$BD=BE=AC=2CM$$

又

$$\angle ABP=\angle ACP$$

则

$$\triangle DBI \backsim \triangle MCP$$

且相似比为 2∶1.

由于

$$PA=PI=PC$$
$$\angle NPI=\angle DBI$$

则

$$\triangle PNI \backsim \triangle CMP$$

从而，有

$$ID=2PM=2IN$$

即 N 是 IK 的中点.

于是，PN 是 IK 的中垂线.

故

$$PC=PI=PK$$

同理

$$PA=PI=PL$$

因此，A，C，K，L 四点共圆，圆心为 P.

❷ 在正 $\triangle ABC$ 的三边上依下列方式选取 6 个点：在边 BC 上选取点 A_1，A_2，在边 CA 上选取点 B_1，B_2，在边 AB 上选取点 C_1，C_2，使得凸六边形 $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ 的边长都相等. 证明：直线 A_1B_2，B_1C_2，C_1A_2 共点(图 46.13).

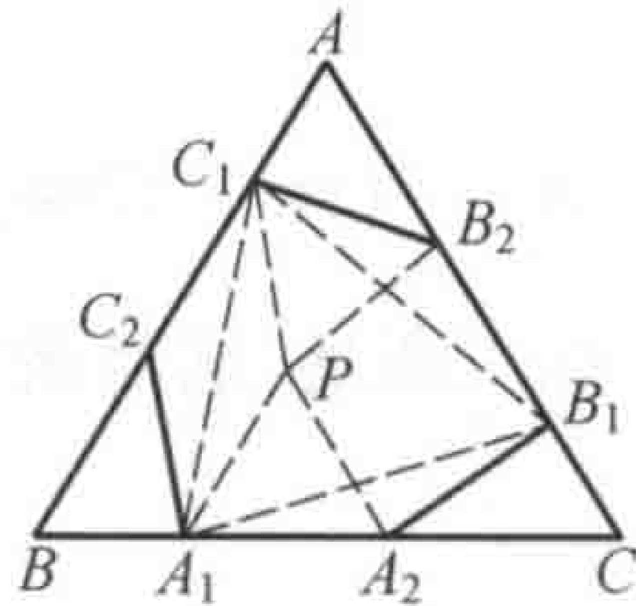


图 46.13

证明 此题答案与本届 IMO 试题的第 1 题答案相同.

3 已知平行四边形 $ABCD$，一条过点 A 的动直线 l 与射线 BC，DC 分别交于点 X，Y，$\triangle ABX$ 中 $\angle BAX$ 内的旁心为 K，$\triangle ADY$ 中 $\angle DAY$ 内的旁心为 L. 证明：$\angle KCL$ 为定值（图 46.14）.

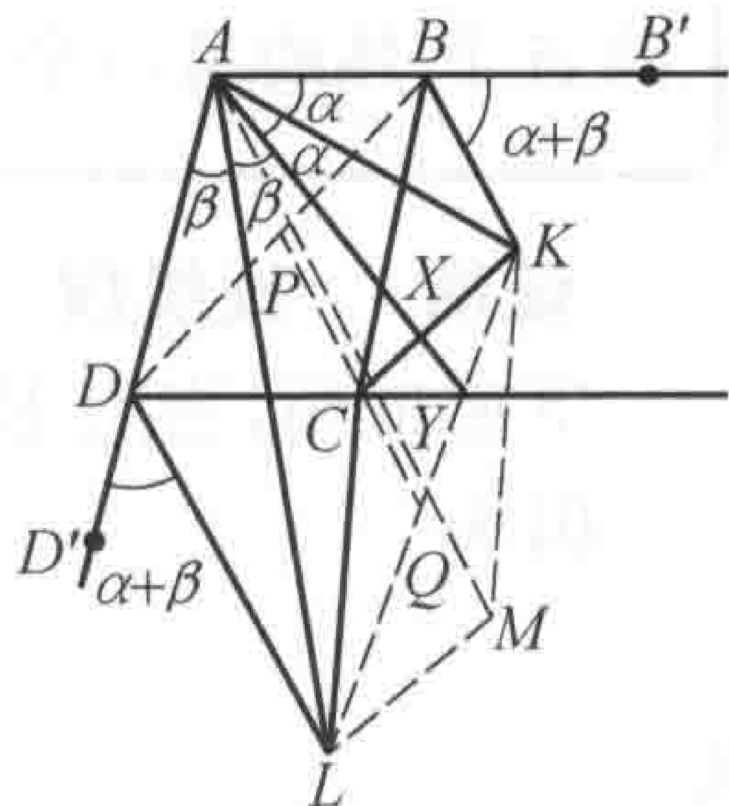


图 46.14

证明 设

$$\angle BAX = 2\alpha, \angle DAY = 2\beta$$

设线段 AB，AD 延长线上两点分别为 B'，D'，则有

$$\angle KAB = \angle KAX = \alpha, \angle LAD = \angle LAY = \beta$$

$$\angle KBB' = \frac{1}{2}\angle BAD = \alpha + \beta = \angle LDD'$$

所以

$$\angle AKB = \beta, \angle ALD = \alpha.$$

设 $\angle BAD$ 的角平分线与 $\triangle AKL$ 的外接圆交于点 M，有

$$BK \parallel AM \parallel DL$$

由于点 K，L 在 AM 的异侧，则

$$\angle MKL = \angle MAL = \angle MAD - \angle LAD = \alpha$$

同理

$$\angle MLK = \beta$$

因此

$$\triangle AKB \backsim \triangle KLM \backsim \triangle LAD$$

于是，有

$$AK \cdot LM = KB \cdot KL$$

$$KM \cdot LA = KL \cdot LD.$$

在圆内接四边形 $AKML$ 中应用托勒密定理，有

$$AM \cdot KL = AK \cdot LM + KM \cdot LA = (KB + LD) \cdot KL$$

即

$$AM = KB + LD$$

设 BD，KL 的中点分别为 P，Q，则梯形 $BKLD$ 的中位线为 PQ. 所以，有

$$2PQ = BK + DL = AM$$

且

$$PQ \parallel AM$$

因为 P 是 AC 的中点，所以，Q 是 CM 的中点. 于是，CM 与 KL 互相平分. 从而，四边形 $KCLM$ 是平行四边形.

故

$$\angle KCL = \angle KML = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BAD$$

为不依赖于直线 l 的一个定值.

4 给定凸四边形 $ABCD$, $BC=AD$, 且 BC 不平行于 AD. 设点 E 和 F 分别在边 BC 和 AD 的内部, 满足 $BE=DF$. 直线 AC 和 BD 相交于点 P, 直线 BD 和 EF 相交于点 Q, 直线 EF 和 AC 相交于点 R. 证明: 当点 E 和 F 变动时, $\triangle PQR$ 的外接圆经过除点 P 外的另一个定点(图 46.15).

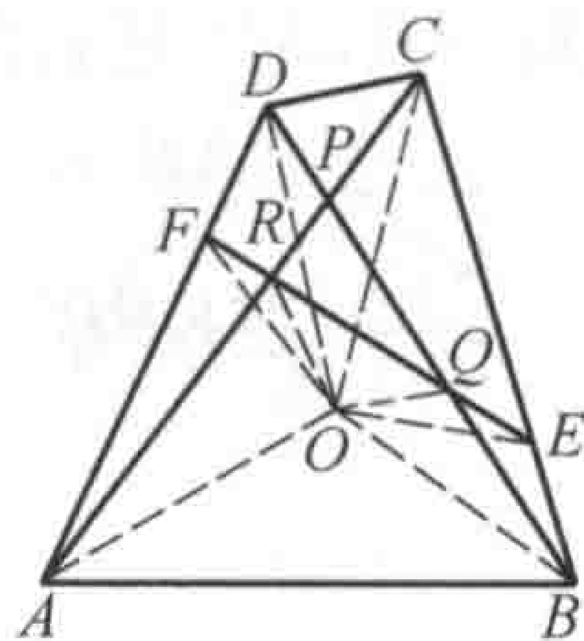


图 46.15

证明 设线段 AC, BD 的垂直平分线相交于点 O. 下面证明: 当点 E 和 F 变动时, $\triangle PQR$ 的外接圆经过点 O.

因为

$$OA=OC, OB=OD$$

及

$$AD=BC$$

所以

$$\triangle ODA \cong \triangle OBC$$

即 $\triangle OBC$ 可以绕点 O 旋转 $\angle BOD$ 后与 $\triangle ODA$ 重合.

又因为

$$BE=DF$$

所以, 这个旋转使点 E 与点 F 重合. 于是

$$OE=OF$$

且

$$\angle EOF=\angle BOD=\angle COA$$

所以

$$\triangle EOF \backsim \triangle BOD \backsim \triangle COA$$

故

$$\angle OEF=\angle OFE=\angle OBD=\angle ODB=\angle OCA=\angle OAC$$

从而, O, B, E, Q 四点共圆, O, E, C, R 也四点共圆.

因此

$$\angle OQB=\angle OEB=\angle ORC$$

故 P, Q, O, R 四点共圆.

综上所述, 当点 E 和 F 变动时, $\triangle PQR$ 的外接圆经过除点 P 外的另一个定点 O.

5 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB \neq AC$, H 为垂心, M 为 BC 的中点, 点 D, E 分别在边 AB, AC 上, 并满足 $AE=AD$, 且 D, H, E 三点共线. 证明: HM 垂直于 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 的外接圆的公共弦(图 46.16).

证明　设 $\triangle ABC$，$\triangle ADE$ 的外心分别为点 O，O_1。

由于 O_1O 垂直于两个圆的公共弦，所以，只需证

$$OO_1 \parallel HM$$

设圆 O 的直径为 AP，BH 与 AC 交于点 B_1，CH 与 AB 交于点 C_1。

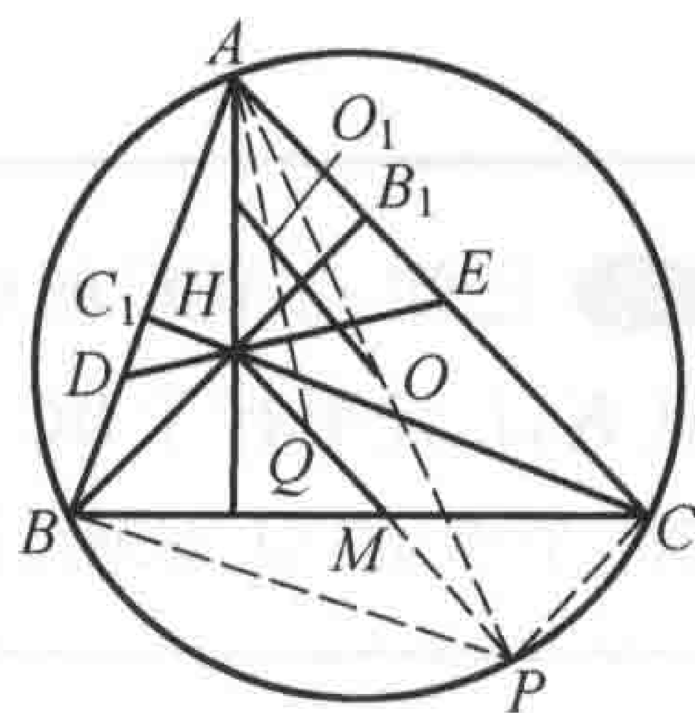


图 46.16

由于

$$AB \perp BP, AC \perp CP$$

所以

$$HC \parallel BP, HB \parallel CP$$

于是，四边形 $BPCH$ 是平行四边形. 故 H，M，P 三点共线.

又因 $\triangle ADE$ 是等腰三角形，所以，点 O_1 在 $\angle BAC$ 的角平分线上.

设 AO_1 与 HP 交于点 Q. 由于射线 AH，AO 关于 AQ 对称，所以，AQ 是 $\angle HAP$ 的角平分线.

于是，有

$$\frac{QH}{QP}=\frac{AH}{AP}$$

又因

$$\angle C_1HD = 90^\circ - \angle C_1DH = \frac{1}{2}\angle BAC$$

$$\angle C_1HB = \angle BAC$$

所以，HD 是 $\angle C_1HB$ 的角平分线. 于是，有

$$\frac{DC_1}{DB}=\frac{HC_1}{HB}$$

因为

$$\triangle AHC_1 \backsim \triangle APC$$

所以

$$\frac{AH}{AP}=\frac{C_1H}{CP}=\frac{C_1H}{BH}$$

于是，可得

$$\frac{DC_1}{DB}=\frac{QH}{QP}$$

由于四边形 C_1HPB 是梯形，则

$$QD \parallel HC_1$$

同理

$$QE \parallel HB_1$$

因此，AQ 是 $\triangle ADE$ 外接圆的直径，即 O_1 是 AQ 的中点.

故

$$OO_1 \parallel PQ$$

即

$$OO_1 \parallel HM$$

6 已知$\triangle ABC$的中线AM交其内切圆Γ于点K,L,分别过点K,L且平行于BC的直线交圆Γ于点X,Y,AX,AY分别交BC于点P,Q.证明:$BP=CQ$.

证明 如图46.17,设$\triangle ABC$的内心为I,内切圆与边BC,CA,AB的切点分别为D,E,F,EF与DI交于点T,过T作平行于BC的直线分别交AB,AC于点U,V.

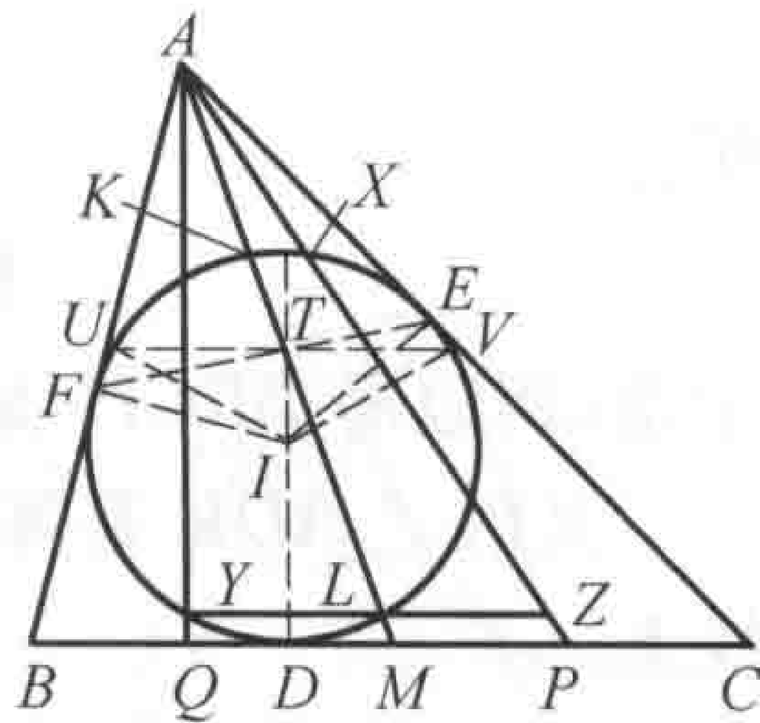


图 46.17

由于

$$\angle ITV=\angle IEV=90^\circ$$

所以,I,T,E,V四点共圆.

从而

$$\angle IVT=\angle IET$$

同理

$$\angle IUT=\angle IFT$$

又因

$$\angle IET=\angle IFT$$

所以,$\triangle IUV$是等腰三角形,IT为其底边UV上的高,T是UV的中点.

从而,A,T,M三点共线.

由于EF是点A关于圆I的极线,所以

$$\frac{AK}{KT}=\frac{AL}{LT}$$

即

$$\frac{AK}{AL}=\frac{TK}{TL}$$

设LY交AP于点Z,则

$$\frac{KX}{LZ}=\frac{AK}{AL}$$

因为IT是KX和LY的公垂线,所以,有

$$\frac{KX}{LY}=\frac{TK}{TL}$$

从而

$$\frac{KX}{LZ}=\frac{KX}{LY}$$

即L是YZ的中点.

因此,M是PQ的中点.

7 在锐角 $\triangle ABC$ 中，点 A,B,C 在边 BC,CA,AB 上的投影分别为点 D,E,F，点 A,B,C 在边 EF,FD,DE 上的投影分别为点 P,Q,R. 记 $\triangle ABC,\triangle PQR,\triangle DEF$ 的周长分别为 p_1，p_2,p_3. 证明：$p_1p_2\geqslant p_3^2$.

证明 如图 46.18，由于 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，所以，P,Q，R 分别是 EF,FD,DE 内部的点. 设点 E,F 在 AB,AC 上的投影分别为 K,L，则

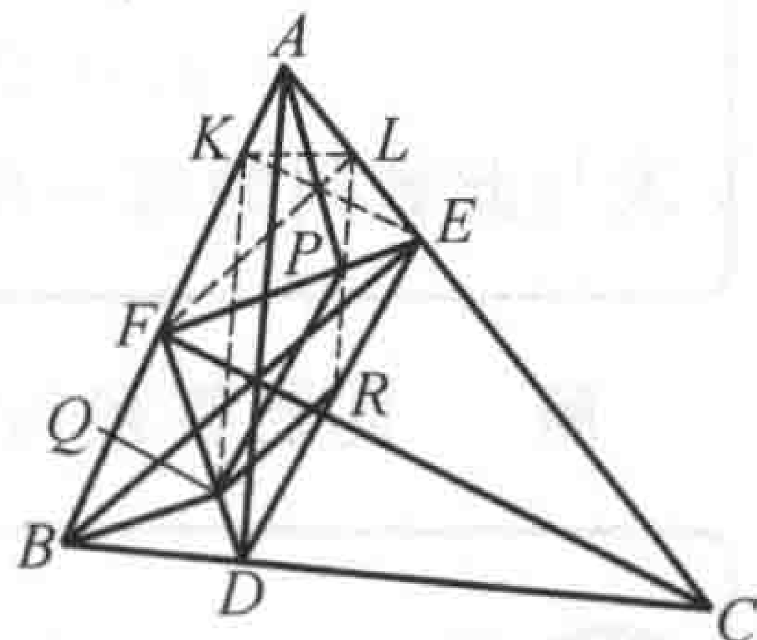


图 46.18

$$\angle AKL=\angle AEF=\angle ABC$$

所以

$$KL\ /\!/\ BC$$

又因

$$\triangle AEF\backsim\triangle ABC\backsim\triangle DBF$$

所以

$$\frac{AK}{KF}=\frac{DQ}{QF}$$

从而，可得

$$KQ\ /\!/\ AD$$

同理

$$LR\ /\!/\ AD$$

由于

$$KL\ /\!/\ BC,AD\perp BC$$

所以

$$QR\geqslant KL$$

又由于

$$\triangle AKL\backsim\triangle AEF\backsim\triangle ABC$$

则

$$\frac{KL}{EF}=\frac{AK}{AE}=\cos A=\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}$$

于是，有

$$QR\geqslant KL=\frac{EF^2}{BC}$$

同理

$$PQ\geqslant\frac{DE^2}{AB},RP\geqslant\frac{FD^2}{CA}$$

由柯西不等式得

$$(AB+BC+CA)(PQ+QR+RP)\geqslant$$
$$(AB+BC+CA)\left(\frac{DE^2}{AB}+\frac{EF^2}{BC}+\frac{FD^2}{CA}\right)\geqslant$$

$$(DE + EF + FD)^2$$

故所证不等式成立.

数论部分

1 数列 $a_1, a_2, \cdots$ 定义如下

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, n = 1, 2, \cdots$$

求与此数列的每一项都互质的所有正整数.

解 此题答案与本届 IMO 试题的第 4 题答案相同.

2 设 $a_1, a_2, \cdots$ 是一个整数数列,其中既有无穷多项是正整数,又有无穷多项是负整数.如果对每一个正整数 n,整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 被 n 除后所得到的 n 个余数互不相同,证明:每个整数恰好在数列 $a_1, a_2, \cdots$ 中出现一次.

证明 由题设知,对任意正整数 $n, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构成模 n 的一个完全剩余系.

若 $i < j$,则 $a_i \neq a_j$.否则,设

$$a_i = a_j = k, i < j$$

则在 $a_1, a_2, \cdots, a_j$ 中存在两个数 a_i, a_j,它们被 j 除的余数相同,矛盾.

进而,若 $i < j \leqslant n$,则

$$|a_i - a_j| \leqslant n - 1$$

事实上,若

$$|a_i - a_j| \geqslant n$$

令

$$m = |a_i - a_j|$$

则 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 就不是模 m 的一个完全剩余系,矛盾.

对于任意正整数 $n(n \geqslant 1)$,令

$$a_{i(n)} = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}, a_{j(n)} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

由上面的讨论知

$$|a_{i(n)} - a_{j(n)}| = n - 1$$

所以,$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 含有 $a_{i(n)}$ 与 $a_{j(n)}$ 之间的所有整数.

设 x 是任一整数,由题设及上面的讨论知,数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 中既含有无穷多个不同的正整数,又含有无穷多个不同的负整数,故存在 i, j,使得

$$a_i < x < a_j$$

令 $n > \max\{i,j\}$，则 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 包含 a_i 与 a_j 之间的每一个整数，故 x 在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中出现.

综上所述，每个整数恰好在数列中出现一次.

3 已知正整数 a,b,c,d,e,f 满足和

$$S=a+b+c+d+e+f$$

可以整除 $abc+def$ 与

$$ab+bc+ca-de-ef-fd$$

证明：S 是合数.

证明 设

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+a)(x+b)(x+c)-\\&(x-d)(x-e)(x-f)=\\&Sx^2+(ab+bc+ca-de-\\&ef-fd)x+abc+def\end{aligned}$$

则二次多项式 $P(x)$ 的系数都是 S 的倍数. 因此

$$P(d)=(a+d)(b+d)(c+d)$$

也是 S 的倍数.

由于 $a+d,b+d,c+d$ 均小于 S，所以，S 一定是合数.

4 求所有的正整数 $n(n>1)$，使得存在唯一的整数 $a(0<a\leqslant n!)$ 满足 a^n+1 可以被 $n!$ 整除.

解 n 是质数.

如果 $n=2$，则有唯一的整数 $a=1$.

如果 $n>2$，且 n 为偶数，则 a^n 是完全平方数. 因此，a^n+1 模 4 的余数为 1 或 2. 而 $n!$ 可以被 4 整除，故不存在满足条件的整数 a.

若 n 为奇数，假设 $n=p$ 是质数，且对某个正整数 $a(0<a\leqslant p!)$，使得

$$p!\mid(a^p+1)$$

由费马小定理，有

$$a^p+1\equiv(a+1)\pmod p$$

因此

$$p\mid(a+1)$$

下面证明：$\dfrac{a^p+1}{a+1}$ 没有小于 p 的质因数 q.

假设存在质数 $q<p$，满足

$$q \mid \frac{a^p+1}{a+1}$$

由于

$$\frac{a^p+1}{a+1}=\sum_{i=0}^{p-1}(-a)^i$$

为奇数,所以,q 为奇数.

于是,有

$$a^p \equiv -1 \pmod q$$

从而,有

$$a^{2p} \equiv 1 \pmod q$$

因此,a 与 q 互质,且

$$a^{q-1} \equiv 1 \pmod q$$

设

$$d=(q-1,2p)$$

则有

$$a^d \equiv 1 \pmod q$$

因为 $q<p$,所以,$d=2$.则

$$a \equiv \pm 1 \pmod q$$

当

$$a \equiv 1 \pmod q$$

时,有

$$\frac{a^p+1}{a+1}=\sum_{i=0}^{p-1}(-a)^i \equiv 1 \pmod q$$

矛盾.

当

$$a \equiv -1 \pmod q$$

时,有

$$\frac{a^p+1}{a+1}=\sum_{i=0}^{p-1}(-a)^i \equiv p \pmod q$$

即 $q \mid p$,矛盾.

由于$\frac{a^p+1}{a+1}$没有小于 p 的质因数,且

$$(p-1)! \mid (a+1)\left(\frac{a^p+1}{a+1}\right)$$

所以

$$(p-1)! \mid (a+1)$$

又因为

$$p \mid (a+1)$$

所以

$$p! \mid (a+1)$$

于是,存在唯一的整数

$$a=p!-1$$

若 n 是奇数,且为合数,设 p 为 n 的最小质数,且

$$p^{\alpha} \mid n!, p^{\alpha+1} \nmid n!$$

因为

$$2p<p^{2} \leqslant n$$

所以

$$n!=1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot p \cdot \cdots \cdot 2p \cdot \cdots \cdot n$$

且 $\alpha \geqslant 2$.

设

$$m=\frac{n!}{p^{\alpha}}$$

对于任意满足

$$a \equiv -1 \pmod{p^{\alpha-1} m}$$

的整数 a,记

$$a=-1+p^{\alpha-1} mk \qquad ①$$

则

$$\begin{aligned} a^{p}&=(-1+p^{\alpha-1} mk)^{p}= \\ &-1+p^{\alpha} mk+\sum_{j=2}^{p}(-1)^{p-j} \mathrm{C}_{p}^{j} p^{(\alpha-1) j}(mk)^{j}= \\ &-1+p^{\alpha} M \end{aligned}$$

其中,M 是整数.这是因为对于所有的 $j \geqslant 2$ 和 $\alpha \geqslant 2$,均有

$$(\alpha-1) j \geqslant \alpha$$

于是

$$p^{\alpha} \mid (a^{p}+1)$$

从而

$$p^{\alpha} \mid (a^{n}+1)$$

又因为

$$m \mid (a+1)$$

所以

$$m \mid (a^{n}+1)$$

考虑到 m 与 p 互质,则对于满足式 ① 的 a 均有

$$n! \mid (a^{n}+1)$$

但在区间$[1,n!]$中有 $p(p>2)$ 个整数满足式 ①,即 $k=1,2,\cdots,p$,与 a 的唯一性矛盾.

5 设正整数 n 的正因数的个数为 $d(n)$. 一个正整数 n 若满足对于所有正整数 $m(m<n)$,有 $d(n)>d(m)$,称 n 为"高可约的". 两个高可约的整数 $m,n(m<n)$ 若满足对于任意的正整数 $s(m<s<n)$ 都不是高可约的,称 m,n 是"连续的". 证明:

(1) 只有有限多对连续的高可约的整数 a,b,满足 $a\mid b$;

(2) 对于每个质数 p,存在无穷多个高可约的正整数 r,使得 pr 也是高可约的.

证明 若 n 的质因数分解式为

$$n=\prod_{p^{\alpha_p^{(n)}}\parallel n} p^{\alpha_p^{(n)}}$$

其中,p 为质数,则

$$d(n)=\prod_{p^{\alpha_p^{(n)}}\parallel n}(\alpha_p(n)+1)$$

由于 $d(n)$ 可以是足够大的值(如 $d(m!)$,其中 m 足够大),因此,有无穷多个高可约的整数.

若 n 是高可约的,则

$$n=2^{\alpha_2}(n)\cdot 3\alpha_3(n)\cdot\cdots\cdot p^{\alpha_p}(n)$$

其中

$$\alpha_2(n)\geqslant\alpha_3(n)\geqslant\cdots\geqslant\alpha_p(n).$$

于是,若质数 $q<p$,且 $p\mid n$,则 $q\mid n$.

下面证明:对于每个质数 p,除了有限个高可约的整数外,其他所有的高可约的整数都是 p 的倍数.

当 $p=2$ 时,上面的结论显然成立.

当 $p\neq 2$ 时,假设 p 是第 $r(r>1)$ 个质数,n 是最大质因数小于 p 的无穷多个高可约的整数中的一个,则

$$(\alpha_2(n)+1)^{r-1}\geqslant d(n)$$

因此,$\alpha_2(n)$ 可以取任意大的值.

设 n 满足

$$2^{\alpha_2(n-1)}>p^2$$

记

$$t=\left[\frac{\alpha_2(n)}{2}\right]$$

令

$$m=\frac{np}{2^t}$$

则

$$m < n$$

而

$$d(m) = 2d(n)\,\frac{\alpha_2(n) - t + 1}{\alpha_2(n) + 1} > d(n)$$

与 n 是高可约的整数矛盾.

因此,有无穷多个高可约的整数是 p 的倍数.

接下来证明:对于任意的质数 p 和常数 k,只有有限多个高可约的整数 n,使得

$$\alpha_p(n) \leqslant k$$

若结论不正确,设 k 是一个使得有无穷多个高可约的整数 n 满足 $\alpha_p(n) \leqslant k$ 的常数,q 是一个满足 $q > p^{2k+1}$ 的质数.除了有限多个正整数 n 外,其他所有的 n 都是 q 的倍数.设

$$m = \frac{p^{\alpha_p(n)\alpha_q(n) + \alpha_p(n) + \alpha_q(n)}\, n}{q^{\alpha_q(n)}}$$

通过计算可知

$$d(m) > d(n)$$

所以

$$m > n$$

于是,有

$$p^{2\alpha_p(n)\alpha_q(n) + \alpha_q(n)} \geqslant p^{\alpha_p(n)\alpha_q(n) + \alpha_q(n) + \alpha_p(n)} > q^{\alpha_q(n)}$$

从而,有

$$p^{2\alpha_p(n)+1} > q > p^{2k+1}$$

与 $\alpha_p(n) \leqslant k$ 矛盾.

(1) 设 n 是高可约的整数,且有

$$\alpha_3(n) \geqslant 8$$

即除了有限个高可约的整数外,所有的 n 都具有上述性质.

由于整数

$$\frac{8n}{9} < n$$

所以

$$d\left(\frac{8n}{9}\right) < d(n)$$

即

$$(\alpha_2(n) + 4)(\alpha_3(n) - 1) < (\alpha_2(n) + 1)(\alpha_3(n) + 1)$$

故

$$3\alpha_3(n) - 5 < 2\alpha_2(n) \qquad ①$$

假设 n, m 是连续的高可约的整数且满足 $n \mid m$,因为

$$d(2n) > d(n)$$

所以,在区间 $(n, 2n]$ 中一定存在一个高可约的整数.

因此

$$m=2n$$

且有

$$d\left(\frac{3n}{2}\right)\geqslant d(n)$$

否则,在区间$\left(n,\frac{3n}{2}\right]$中一定存在一个高可约的整数,与 n,m 是连续的高可约的整数矛盾.于是

$$\alpha_2(n)(\alpha_3(n)+2)\leqslant(\alpha_2(n)+1)(\alpha_3(n)+1)$$

所以

$$\alpha_2(n)\leqslant\alpha_3(n)+1$$

代入式 ① 可得

$$3\alpha_3(n)-5<2(\alpha_3(n)+1)$$

所以,$\alpha_3(n)<7$,与 $\alpha_3(n)\geqslant 8$ 矛盾.

因此,只有有限多对连续的高可约的整数 a,b,满足 $a\mid b$.

(2) 设 k 是任意的正整数,则存在最小的高可约的正整数 n,使 $\alpha_p(n)\geqslant k$,且除了有限多个高可约的整数外,所有的高可约的整数 n' 均满足

$$\alpha_p(n')\geqslant k$$

下面证明:$\frac{n}{p}$ 也是高可约的整数.

若$\frac{n}{p}$不是高可约的整数,则存在一个高可约的整数 $m<\frac{n}{p}$,使得

$$d(m)\geqslant d\left(\frac{n}{p}\right)$$

由于

$$\alpha_p(m)<\alpha_p(n)$$

因此,有

$$d(mp)=d(m)\frac{\alpha_p(m)+2}{\alpha_p(m)+1}\geqslant d\left(\frac{n}{p}\right)\frac{\alpha_p(n)+1}{\alpha_p(n)}=d(n)$$

其中,不等式用到了

$$f(x)=\frac{x+1}{x}$$

是减函数.

又因为 $mp<n$,与 n 是高可约的整数矛盾,因此,$\frac{n}{p}$ 是高可约的整数.

又由于 k 可以足够大,所以,可以得到无穷多个高可约的整数 n,使得$\frac{n}{p}$也是高可约的,其中,p 为任意质数.

6 设 a,b 是正整数,使得对于任意的正整数 n,均有
$$(a^n+n)\mid(b^n+n)$$
证明:$a=b$.

证明 假设 $b\neq a$.

当 $n=1$ 时,有
$$(a+1)\mid(b+1)$$
故
$$b>a$$
设 p 是一个大于 b 的质数,n 是满足
$$n\equiv 1(\bmod(p-1)),n\equiv -a(\bmod p)$$
的正整数.

由中国剩余定理(即孙子定理)知,这样的 n 是存在的.例如
$$n=(a+1)(p-1)+1$$
由费马小定理,有
$$a^n=a^{k(p-1)+1}\equiv a(\bmod p)$$
其中,k 为整数.

所以
$$a^n+n\equiv 0(\bmod p)$$
因此
$$p\mid(b^n+n)$$
再由费马小定理,有
$$b^n+n\equiv(b-a)(\bmod p)$$
所以,$p\mid(b-a)$,矛盾.

因此
$$a=b$$

7 设 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$,其中,$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是整数,$a_n>0(n\geqslant 2)$.证明:存在正整数 m,使得 $P(m!)$ 是合数.

证明 假设 $a_0=\pm 1$.否则,当 $a_0=0$ 及 $a_0\neq 0,\pm 1$ 时,结论成立.

若质数
$$p>k\geqslant 1$$
则
$$(p-1)!=(p-k)![p-(k-1)][p-(k-2)]\cdots(p-1)\equiv$$

$$(-1)^{k-1}(p-k)!\ (k-1)!\ (\bmod p)$$

由威尔逊(Wilson)定理知

$$(p-1)!\ \equiv -1(\bmod p)$$

所以

$$(p-k)!\ (k-1)!\ \equiv (-1)^k(\bmod p)$$

设

$$Q(x)=a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_0x^n$$

则有

$$P\left(\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\right)=\frac{(-1)^{kn}}{[(k-1)!\ ]^n}Q((-1)^k(k-1)!\ )$$

若

$$k-1>a_n^2$$

则

$$a_n \mid (k-1)!$$

且$\frac{(k-1)!}{a_n}$可以被小于或等于$k-1$的所有的质数整除. 于是

$$Q((-1)^k(k-1)!\ )=a_nb_k$$

其中

$$b_k=1+\frac{a_{n-1}(-1)^k(k-1)!}{a_n}+\cdots+\frac{a_0[(-1)^k(k-1)!\ ]^n}{a_n}$$

中没有小于或等于$k-1$的质因数.

由于$Q(x)$的首项为$a_0=\pm 1$,所以,$Q(x)$不是常数. 故当k足够大时,$|Q((-1)^k(k-1)!\ )|$也可以足够大.

从而,$|b_k|$也可以足够大.

特别地,当k足够大时

$$|b_k|>1$$

取这样的k为偶数,任选b_k的质因数p,则$p>k$,且有

$$P((p-k)!\ )\equiv 0(\bmod p)$$

为了证明原命题,需要确定k,使得

$$|P((p-k)!\ )|>p$$

取$k=m!$,其中,$m=q-1>2$,q是一个质数,则$m!$是合数,$m!\ +1$也是合数(因为

$$m!\ +1>m+1=q$$

由威尔逊定理知$m!\ +1\equiv 0(\bmod q)$),且$m!\ +l(l=2,3,\cdots,m)$也是合数.

所以,设比$m!\ +l$大的最小的质数

$$p=m!\ +m+t,t\geqslant 1,t\in \mathbf{N}$$

因此

$$p-k=m+t$$

对于足够大的 m，有

$$P((p-k)!)=P((m+t)!)>\frac{(m+t)!}{2}$$

这是因为 $a_n>0$.

当 m 足够大时

$$\frac{(m+t)!}{2}>m!+m+t, t\geqslant 1$$

因此

$$P((p-k)!)>p$$

且 $P((p-k)!)$ 是 p 的倍数.

所以，$P((p-k)!)$ 是合数.

第二编
第47届国际数学奥林匹克

第 47 届国际数学奥林匹克题解

斯洛文尼亚,2006

韩国命题

❶ 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,P 是 $\triangle ABC$ 内部的一点,满足

$$\angle PBA+\angle PCA=\angle PBC+\angle PCB$$

证明:$AP\geqslant AI$,并说明等号成立的充分必要条件是 $P=I$(图 47.1).

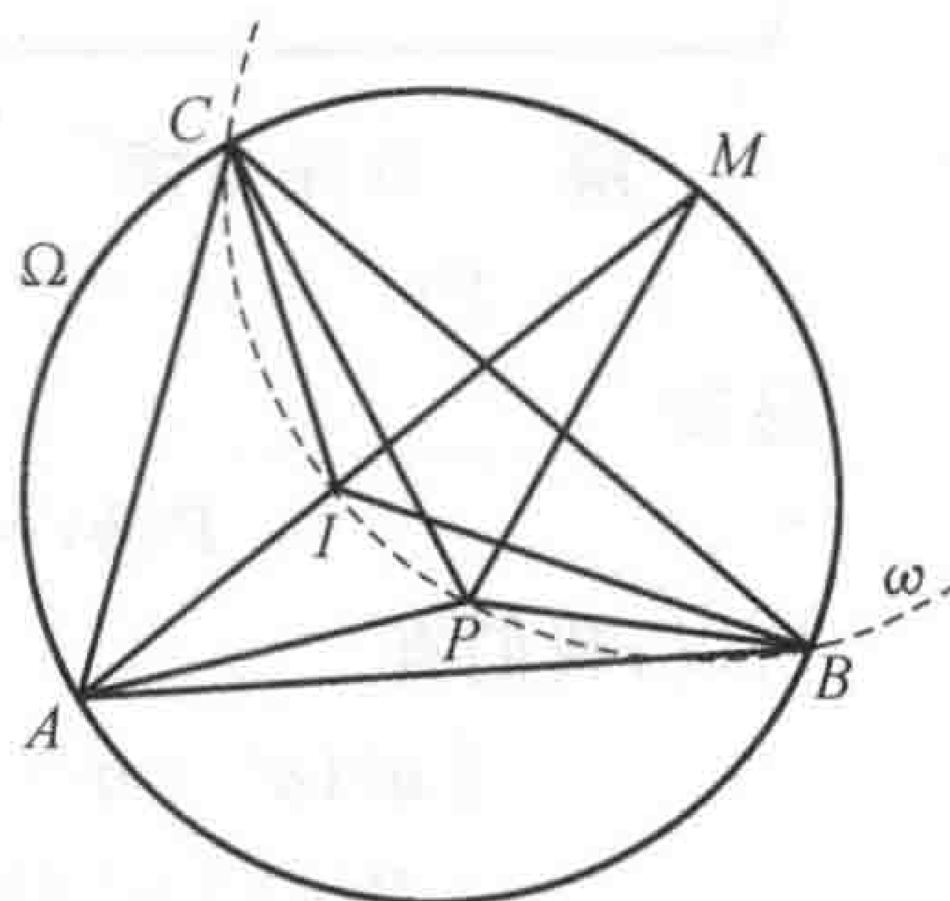


图 47.1

证明 设

$$\angle A=\alpha,\angle B=\beta,\angle C=\gamma$$

由于

$$\angle PBA+\angle PCA+\angle PBC+\angle PCB=\beta+\gamma$$

由假设

$$\angle PBC+\angle PCB=\frac{\beta+\gamma}{2}$$

由于 P,I 位于 BC 的同一边,点 B,C,I,P 四点共圆,即点 P 在 $\triangle BCI$ 的外接圆 ω 上. 记 Ω 为 $\triangle ABC$ 的外接圆,则 ω 的中心 M 为 Ω 的弧 BC 的中点,即为 $\angle A$ 的平分线 AI 与 Ω 的交点. 由于在 $\triangle APM$ 中,有

$$AP+PM\geqslant AM=AI+IM=AI+PM$$

故

$$AP\geqslant AI$$

等号成立的充分必要条件是点 P 位于线段 AI 上,即 $P=I$.

塞黑命题

❷ 设 P 为正 2 006 边形. 如果 P 的一条对角线的两端将 P 的边界分成两部分,每部分都包含 P 的奇数条边,那么该对角线称为"好边". 规定 P 的每条边均为"好边".

已知 2 003 条在 P 内部不相交的对角线将 P 分割成若干三角形. 试问在这种分割之下,最多有多少个有两条"好边"的等腰三角形?

解 如果等腰三角形具有两条好边,则简称为"好三角形".

设 ABC 是一个好三角形,且 AB,BC 为好边. 那么,在 A 与 B 之间,存在 P 的奇数条边,对 B 与 C 也一样,我们称这些边属于好

三角形 ABC.

在这些组的每一组，至少有一边不属于任何其他好三角形. 这是因为两个顶点在 A 与 B 之间的好三角形有两条等长的边，从而，总共有偶数条边属于它. 除去属于任意其他好三角形的所有边，这时必留有一边不属于其他好三角形. 我们指定这些两边（在每组中一个）属于三角形 ABC.

对每个好三角形，我们指定一对边，没有两个三角形共享指定的边. 推出在这种分割之下，最多有 1 003 个好三角形. 而且，容易画出达到这个值的分割.

爱尔兰命题

3 求最小的实数 M，使得对所有的实数 a，b 和 c，有

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)|\leqslant M(a^2+b^2+c^2)^2$$

解 首先考虑

$$P(t)=tb(t^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ct(c^2-t^2)$$

易知

$$P(b)=P(c)=P(-c-b)=0$$

所以，我们有

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)|=|P(a)|=|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)|$$

原不等式等价于

$$|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)|\leqslant M(a^2+b^2+c^2)^2$$

由于对称性，不妨假设

$$a\leqslant b\leqslant c$$

则我们有

$$|(a-b)(b-c)|=(b-a)(c-b)\leqslant\left(\frac{(b-a)+(c-b)^2}{2}\right)=\frac{(c-a)^2}{4}$$

且等号成立的充分必要条件为

$$b-a=c-b$$

即

$$2b=a+c$$

又

$$\left(\frac{(c-b)+(b-a)}{2}\right)^2\leqslant\frac{(c-b)^2+(b-a)^2}{2}$$

或等价于

$$3(c-a)^2 \leqslant 2[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2]$$

且等号成立充分必要条件是

$$2b=a+c$$

从而

$$|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \leqslant$$

$$\frac{1}{4}|(c-a)^3(a+b+c)| =$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{(c-a)^6(a+b+c)^2} \leqslant$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{2((b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2)}{3}\right)^3(a+b+c)^2} \leqslant$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt[4]{\left(\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}\right)^3(a+b+c)^2}\right)^2$$

由加权 $AM-GM$ 不等式，有

$$|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \leqslant$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2+(a+b+c)^2}{4}\right)^2 =$$

$$\frac{9\sqrt{2}}{32}(a^2+b^2+c^2)^2$$

于是

$$M=\frac{9\sqrt{2}}{32}$$

且等号成立的充分必要条件为

$$2b=a+c$$

以及

$$\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}=(a+b+c)^2$$

解得

$$2b=a+c,(c-a)^2=18b^2$$

取 $b=1$，得到

$$a=1-\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

和

$$c=1+\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

从而，当

$$\left(1-\frac{3}{2}\sqrt{2},1,1+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$$

时，等号成立，故

$$M=\frac{9}{32}\sqrt{2}$$

美国命题

4 求所有的整数对 (x,y)，使得

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2$$

解 如果 (x,y) 为解，则 $x\geqslant 0$，$(x,-y)$ 也是解. 当 $x=0$ 时，有解 $(0,2)$，$(0,-2)$.

设 (x,y) 为解，$x>0$，不失一般性，设 $y>0$.

原方程等价于

$$2^x(1+2^{x+1})=(y-1)(y+1)$$

于是 $y-1$ 和 $y+1$ 为偶数，其中恰有一个被 4 整除，因此

$$x\geqslant 3$$

有一个因式被 2^{x-1} 整除，不被 2^x 整除. 于是

$$y=2^{x-1}m+\varepsilon$$

m 为奇数，$\varepsilon=\pm 1$. 代入原方程，有

$$2^x(1+2^{x+1})=(2^{x-1}m+\varepsilon)^2-1=2^{2x-2}m^2+2^xm\varepsilon$$

即

$$1+2^{x+1}=2^{x-2}m^2+m\varepsilon$$

从而

$$1-m\varepsilon=2^{x-2}(m^2-8)$$

当 $\varepsilon=1$ 时

$$m^2-8\leqslant 0$$

即

$$m=1$$

上式不成立.

当 $\varepsilon=-1$ 时，有

$$1+m=2^{x-2}(m^2-8)\geqslant 2(m^2-8)$$

推出

$$2m^2-m-17\leqslant 0$$

因此

$$m\leqslant 3$$

另一方面，$m\neq 1$，由于 m 为奇数，得到 $m=3$，从而

$$x=4,y=23$$

故所有解为

$$(0,2),(0,-2),(4,23),(4,-23)$$

罗马尼亚命题

5 设 $P(x)$ 为 n 次 $(n>1)$ 整系数多项式，k 是一个正整数. 考虑多项式 $Q(x)=P(P(\cdots P(P(x))\cdots))$，其中 P 出现 k 次. 证明：最多存在 n 个整数 t，使得 $Q(t)=t$.

证明 首先,如果Q的每个整数不动点也是P的不动点,那么,结论成立.

对任意整数x_0,满足

$$Q(x_0)=x_0$$

但

$$P(x_0)\neq x_0$$

我们定义

$$x_{i+1}=P(x_i),i=0,1,2,\cdots$$

则

$$x_k=x_0$$

显然,对不同的u,v,有

$$u-v\mid P(u)-P(v)$$

从而,对于下面的(非零)差式,前一项能整除后一项

$$x_0-x_1,x_1-x_2,\cdots,x_{k-1}-x_k,x_k-x_{k+1}$$

由于

$$x_k-x_{k+1}=x_0-x_1$$

所以所有的差式的绝对值相等.考虑

$$x_m=\min(x_1,\cdots,x_k)$$

则

$$x_{m-1}-x_m=-(x_m-x_{m+1})$$

于是

$$x_{m-1}=x_{m+1}(\neq x_m)$$

推出相继的差有相反的符号,我们得到$x_0,x_1,\cdots$取两个不同的值,换句话说,Q的整数不动点为多项式$P(P(x))$的不动点,我们将证明这样的不动点最多有n个.

假设a为满足性质的一个不动点,设$b=P(a)\neq a$(我们已经假定这样的a存在),那么$a=P(b)$.取$P(P(x))$的任意整数不动点α,令$P(\alpha)=\beta$,则$\alpha=P(\beta)$,α和β可以相同(即α可以是P的不动点),但α,β与a,b互不相同.对四对数$(\alpha,a),(\beta,b),(\alpha,b),(\beta,a)$应用前面的性质,得到$\alpha-a$与$\beta-b$相互整除,$\alpha-b$与$\beta-a$相互整除,从而

$$\alpha-b=\pm(\beta-a),\alpha-a=\pm(\beta-b)$$

如果在两式中取加号,则

$$\alpha-b=\beta-a$$

与

$$\alpha-a=\beta-b$$

得到

$$a-b=b-a$$

与$a\neq b$矛盾.那么至少有一个等式取负号,得到

$$\alpha+\beta=a+b$$

即

$$a+b-\alpha-P(\alpha)=0$$

用 C 表示 $a+b$ 的集合，我们已经证明 Q 的每个不等于 a 和 b 的整数不动点都是多项式

$$F(x)=C-x-P(x)$$

的根，对于 a 和 b 同样成立．由于多项式 $F(x)$ 与 $P(x)$ 有相同的次数，即为 n 次多项式，从而至多有 n 个不同的整数根．证毕．

6 对于凸多边形 P 的任意边 b，以 b 为边，在 P 内部作一个面积最大的三角形．证明：对 P 的每条边，按上述方法所得三角形的面积之和至少是 P 的面积的 2 倍．

塞黑命题

解 首先，我们证明一个引理．

引理 对每个面积为 S 的凸 $2n$ 边形，由它的边和顶点联结成的三角形的面积不小于 $\frac{S}{2}$．

引理的证明 $2n$ 边形的主对角线是指将 $2n$ 边形分割成两个多边形，均包含有相同的边．对 $2n$ 边形的任意边 b，$\triangle_b$ 表示三角形 ABP，其中 A，B 是 b 的端点，P 是主对角线 AA'，BB' 的交点．将证明在所有的边上取的三角形 $\triangle_b$ 并覆盖整个多边形．

为此，选取任意边 AB，考虑主对角线 AA' 作为有向线段．令 X 是多边形中的任意点，且不在任意主对角线上，不妨假定 X 在射线 AA' 的左边．考虑主对角线列

$$AA',BB',CC',\cdots$$

其中 A，B，C，$\cdots$ 为相继的顶点，且位于 AA' 的右边．

在这个数列中第 n 项为对角线 $A'A$，X 在它的右边，于是在 A' 之前，数列 A，B，C，$\cdots$ 中存在两个相继的顶点 K，L，使得 X 仍在 KK' 的左边，在 LL' 的右边，推出 X 在三角形 $\triangle_{l'}$ 中

$$l'=K'L'$$

对位于 AA' 的右边的点 X 可以类似讨论（在主对角线上的点可以忽略不予考虑）．于是三角形 $\triangle_b$ 覆盖整个多边形．

它们的面积之和不小于 S，所以可以找到两个相反的边，如 $b=AB$ 和 $b'=A'B'$（AA'，BB' 为主对角线），使得

$$[\triangle_b]+[\triangle_{b'}]\geqslant\frac{S}{n}$$

这里$[\cdots]$表示区域的面积．设 AA' 和 BB' 相交于 P，不失一般性，假定

$$PB\geqslant PB'$$

那么

$$[ABA'] = [ABP] + [PBA'] \geqslant$$
$$[ABP] + [PA'B'] =$$
$$[\triangle_b] + [\triangle_{b'}] \geqslant \frac{S}{n}$$

引理证毕.

现在,假设凸多边形 P 的面积为 S,有 m 条边 $a_1, a_2, \cdots, a_m$. 设 S_i 为 P 中最大的三角形,且具有边 a_i. 如果结论不成立,则

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{S_i}{S} < 2$$

那么,存在有理数 $q_1, q_2, \cdots, q_m$,满足 $\sum_{i=1}^{m} q_i = 2$,对每个 $i, q_i > \frac{S_i}{S}$. 令 n 是 m 个分式 $q_1, q_2, \cdots, q_m$ 的公分母. 令

$$q_i = \frac{k_i}{n}$$

于是

$$\sum k_i = 2n$$

将 P 的每边 a_i 分成 k_i 个相等的部分,得到一个面积为 S 的凸 $2n$ 边形(某些角等于 180°),对于它应用引理. 依此,有边 b 和顶点 H 的加细的多边形分成面积

$$[T] \geqslant \frac{S}{n}$$

的三角形 T. 如果 b 是 P 的边 a_i 的一部分,那么具有底 a_i 以及最高顶点 H 的三角形 W 有面积

$$[W] = k_i \cdot [T] \geqslant k_i \cdot \frac{S}{n} = q_i \cdot S > S_i$$

与 S_i 的定义矛盾. 证毕.

第 47 届国际数学奥林匹克英文原题

The forty-seventh International Mathematical Olympiad was held from July 10th to July 18th 2006 in the capital city of Ljubljana.

1 Let ABC be a triangle with incenter I. A point P in the interior of the triangle, satisfies

$$\angle PBA+\angle PCA=\angle PBC+\angle PCB$$

Show that $AP\geqslant AI$, and that equality holds if and only if $P=I$.

(Korea)

2 Let P be a regular 2 006-gon. A diagonal of P is called good if its endpoints divide the boundary of P into two parts, each composed of an odd number of sides of P. The sides of P are also called good.

Suppose P has been dissected into triangles by 2 003 diagonals, no two of which have a common point in the interior of P. Find the maximum number of isosceles triangles having two good sides that could appear in such division.

(Serbia)

3 Determine the least real number M such that the inequality

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)|\leqslant M(a^2+b^2+c^2)$$

holds for all real numbers a,b and c.

(Ireland)

4 Determine all pairs (x,y) of integers such that

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2$$

(USA)

5 Let $P(x)$ be a polynomial of degree $n>1$ with integer coefficients and let k be a positive integer. Consider the polynomial $Q(x)=P(P(\cdots P(P(x))\cdots))$, where P occurs k

(Romania)

times. Prove that there are at most n integers t such that $Q(t)=t$.

6 Assign to each side b of a convex polygon P, the maximum area of a triangle that has b as a side and is contained in P. Show that the sum of the areas assigned to the sides of P is at least twice the area of P.

(Serbia)

第47届国际数学奥林匹克各国成绩表

2006,斯洛文尼亚

名次	国家或地区	分数	奖牌			参赛队
		(满分252)	金牌	银牌	铜牌	人数
1.	中国	214	6	—	—	6
2.	俄罗斯	174	3	3	—	6
3.	韩国	170	4	2	—	6
4.	德国	157	4	—	2	6
5.	美国	154	2	4	—	6
6.	罗马尼亚	152	3	1	2	6
7.	日本	146	2	3	1	6
8.	伊朗	145	3	1	2	6
9.	摩尔多瓦	140	2	1	3	6
10.	中国台湾	136	1	4	1	6
11.	波兰	133	1	2	3	6
12.	意大利	132	2	2	—	6
13.	越南	131	2	1	3	6
14.	中国香港	129	1	3	2	6
15.	泰国	123	1	2	3	6
16.	加拿大	123	—	4	2	6
17.	匈牙利	122	—	3	3	6
18.	斯洛伐克	118	1	2	3	6
19.	土耳其	117	—	4	1	6
20.	英国	117	—	4	1	6
21.	保加利亚	116	—	3	2	6
22.	乌克兰	114	1	1	3	6
23.	白俄罗斯	111	—	3	2	6
24.	墨西哥	110	1	2	1	6
25.	以色列	109	—	2	2	6
26.	澳大利亚	108	—	3	2	6
27.	新加坡	100	—	1	4	6
28.	法国	99	1	—	3	6
29.	巴西	96	—	—	6	6
30.	瑞士	95	1	1	—	6

续表

名次	国家或地区	分数（满分252）	奖牌 金牌	银牌	铜牌	参赛队人数
31.	阿根廷	95	—	2	2	6
32.	哈萨克斯坦	95	—	—	5	6
33.	格鲁吉亚	94	—	1	3	6
34.	立陶宛	94	—	1	2	6
35.	印度	92	—	—	5	6
36.	斯洛文尼亚	90	—	1	3	6
37.	亚美尼亚	90	—	1	1	6
38.	塞尔维亚	88	—	—	5	6
39.	芬兰	86	—	—	4	6
40.	秘鲁	85	—	—	2	6
41.	波斯尼亚一黑塞哥维那	84	—	1	2	6
42.	奥地利	83	—	—	3	6
43.	瑞典	82	—	—	3	6
44.	西班牙	80	—	1	2	6
45.	爱沙尼亚	80	—	—	2	6
46.	蒙古	80	—	—	2	6
47.	葡萄牙	78	—	—	3	6
48.	阿塞拜疆	77	—	1	1	6
49.	捷克共和国	77	—	—	3	6
50.	阿尔巴尼亚	76	—	1	1	6
51.	哥伦比亚	76	—	—	2	6
52.	拉托维亚	75	—	—	3	6
53.	比利时	75	—	—	1	6
54.	克罗地亚	72	—	1	1	6
55.	斯里兰卡	71	—	—	3	5
56.	希腊	69	—	—	2	6
57.	乌兹别克斯坦	68	—	—	2	6
58.	新西兰	66	—	—	2	6
59.	中国澳门	63	—	—	2	6
60.	冰岛	63	—	—	1	6
61.	土库曼斯坦	59	—	—	2	5
62.	马其顿	57	—	—	1	6
63.	荷兰	57	—	—	—	6
64.	南非	57	—	—	—	6
65.	摩洛哥	55	—	—	—	6
66.	挪威	52	—	—	1	6
67.	爱尔兰	49	—	—	—	6
68.	巴拉圭	47	—	1	—	4
69.	丹麦	45	—	—	—	6

续表

名次	国家或地区	分数（满分 252）	奖牌 金牌	银牌	铜牌	参赛队人数
70.	厄瓜多尔	40	—	—	1	6
71.	马来西亚	40	—	—	1	6
72.	塔吉克斯坦	35	—	—	—	6
73.	委内瑞拉	34	—	—	—	4
74.	特立尼达和多巴哥	34	—	—	—	6
75.	巴拿马	33	—	—	—	4
76.	巴基斯坦	32	—	—	—	5
77.	吉尔吉斯斯坦	31	—	—	—	6
78.	哥斯达黎加	27	—	—	1	2
79.	萨尔瓦多	27	—	—	—	3
80.	孟加拉国	22	—	—	—	4
81.	塞浦路斯	19	—	—	—	6
82.	乌拉圭	12	—	—	—	2
83.	卢森堡	12	—	—	—	2
84.	波多黎各	11	—	—	—	6
85.	尼日利亚	11	—	—	—	6
86.	玻利维亚	15	—	—	—	2
87.	科威特	5	—	—	—	4
88.	沙特阿拉伯	3	—	—	—	4
89.	列支敦士登	2	—	—	—	1
90.	莫桑比克		—	—	—	3

第 47 届国际数学奥林匹克预选题

斯洛文尼亚,2006

代数部分

1 实数列 $a_0, a_1, \cdots$ 定义如下:对于所有非负整数 i,$a_{i+1}=[a_i]\{a_i\}$,其中,a_0 是任意一个实数,$[a_i]$ 表示不大于 a_i 的最大整数,$\{a_i\}=a_i-[a_i]$. 证明:对于足够大的 i,有 $a_i=a_{i+2}$.

证明 若 $a_0 \geqslant 0$,则 $a_i \geqslant 0$. 对于 $a_i \geqslant 1$,有

$$[a_{i+1}] \leqslant a_{i+1}=[a_i]\{a_j\}<[a_i]$$

因此,总存在一项 $a_j(j>i)$,使得 $a_j<1$.

从而,$a_{j+1}=0$,即当 $n \geqslant j+1$ 时,有 $a_n=0$.

若 $a_0<0$,则 $a_i \leqslant 0$.

如果存在一项 $a_j=0$,则当 $n \geqslant j$ 时,$a_n=0$.

如果任意一项 a_i 均不为 0,则对于所有的非负整数 i,有 $[a_i] \leqslant -1$. 于是

$$1+[a_{i+1}]>a_{i+1}=[a_i]\{a_i\}>[a_i]$$

从而,数列 $\{[a_i]\}$ 单调不减.

由于 $[a_i]$ 是负整数,于是,存在 i_0 和负整数 c,使得当 $i \geqslant i_0$ 时,$[a_i]=c$.

从而

$$a_{i+1}=c\{a_i\}=c(a_i-c)=ca_i-c^2$$

设

$$b_i=a_i-\frac{c^2}{c-1}$$

则

$$b_{i+1}=a_{i+1}-\frac{c^2}{c-1}=ca_i-c^2-\frac{c^2}{c-1}=cb_i$$

于是

$$b_i=c^{i-i_0}b_{i_0}, i \geqslant i_0$$

由于 $a_i \in [c, c+1]$ 对所有 $i \geqslant i_0$ 成立,则 b_i 有界. 因此,要么 $b_{i_0}=0$,要么 $|c|=1$,即 $c=-1$.

若 $b_i=0(i \geqslant i_0)$,则

$$a_i = \frac{c^2}{c-1}, i \geqslant i_0$$

若 $c=-1$,则

$$a_i = -\frac{1}{2} + (-1)^{i-i_0} b_{i_0} = -\frac{1}{2} + (-1)^{i-i_0}\left(a_{i_0} + \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} a_{i_0}, i = i_0, i_0+2, \cdots \\ -1 - a_{i_0}, i = i_0+1, i_0+3, \cdots \end{cases}$$

综上,当 i 足够大时,数列 $\{a_i\}$ 要么是常数,要么是两个交替的数.

故总有 $a_i = a_{i+2}$.

2 实数列 $a_0, a_1, \cdots$,定义为:$a_0=-1$,对于所有正整数 n,有 $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0$. 证明:对于所有正整数 n,有 $a_n > 0$.

解 用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时,得

$$a_1 = \frac{1}{2} > 0$$

假设当 $n \geqslant 1$ 时,有

$$a_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$$

由

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+1} = 0, \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{n-k+2} = 0$$

得

$$0 = (n+2)\sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{n-k+2} - (n+1)\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+1} = (n+2)a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n+2}{n-k+2} - \frac{n+1}{n-k+1}\right)a_k = (n+2)a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+2}{n-k+2} - \frac{n+1}{n-k+1}\right)a_k$$

故

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1}{n-k+1} - \frac{n+2}{n-k+2}\right)a_k = \frac{1}{n+2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(n-k+1)(n-k+2)}a_k > 0$$

3 数列 $c_0, c_1, \cdots$ 定义为：$c_0 = 1, c_1 = 0$，对于非负整数 n，$c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$. 考虑有序数对 (x, y) 构成的集合 S，其中，(x, y) 满足：有一个由正整数构成的有限集 J，使得

$$x = \sum_{j \in J} c_j, y = \sum_{j \in J} c_{j-1}$$

证明：存在实数 α、β、m、M 具有下列性质：由非负整数构成的有序数对 $(x, y) \in S$ 的充分必要条件是 $m < \alpha x + \beta y < M$.

注 对空集求和，其和为 0.

证明 设

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

是二次方程

$$t^2 - t - 1 = 0$$

的两个根. 则有

$$\phi\psi = -1, \phi + \psi = 1, 1 + \psi = \psi^2$$

由特征根法可得，对于 $n \geqslant 0$，有

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n-1} - \psi^{n-1})$$

假设对于恰当选择的 m, M，数 α, β 满足条件中的性质.

因为 $(c_n, c_{n-1}) \in S$，所以，对于所有非负整数 n，有

$$\alpha c_n + \beta c_{n-1} = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}(\phi^{n-1} - \psi^{n-1}) + \frac{\beta}{\sqrt{5}}(\phi^{n-2} - \psi^{n-2}) =$$
$$\frac{1}{\sqrt{5}}[(\alpha\phi + \beta)\phi^{n-2} - (\alpha\psi + \beta)\psi^{n-2}] \qquad ①$$

有界.

又因为

$$\phi > 1, -1 < \psi < 0$$

所以

$$\alpha\phi + \beta = 0$$

设

$$\alpha = \psi, \beta = 1$$

则有

$$\alpha\phi + \beta = 0$$

对于这样选择的 α, β，下面确定满足条件的 m, M.

将 $\alpha = \psi, \beta = 1$ 代入式 ① 得

$$c_n\psi + c_{n-1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}(\psi^2 + 1)\psi^{n-2} = \psi^{n-1}, n \geqslant 1$$

设 S 中的元素为(a_J,b_J),其中,J 是一个由正整数构成的有限集. 则

$$a_J=\sum_{j\in J}c_j,b_J=\sum_{j\in J}c_{j-1}$$

因此,对于每个数对$(a_J,b_J)\in S$,有

$$\psi a_J+b_J=\sum_{j\in J}(c_j\psi+c_{j-1})=\sum_{j\in J}\psi^{j-1} \qquad ②$$

考虑到

$$-1<\psi<0$$

可得

$$-1=\frac{\psi}{1-\psi^2}=\sum_{j=0}^{+\infty}\psi^{2j+1}<\sum_{j\in J}\psi^{j-1}<\sum_{j=0}^{+\infty}\psi^{2j}=$$

$$\frac{1}{1-\psi^2}=1-\psi=\phi$$

因此,对于所有的$(a_J,b_J)\in S$,有

$$-1<\psi a_J+b_J<\phi$$

取

$$m=-1,M=\phi$$

即可.

反之,证明:若非负整数组成的有序数列(x,y)满足

$$-1<\psi x+y<\phi$$

则

$$(x,y)\in S$$

引理 设 x,y 是非负整数,且满足

$$-1<\psi x+y<\phi$$

则存在正整数集的子集 J,使得

$$\psi x+y=\sum_{j\in J}\psi^{j-1}$$

引理的证明 当

$$x=y=0$$

时,取 J 为正整数集的空集. 若 x,y 中至少有一个不是 0,则 $\psi x+y$ 可以表示为

$$\psi x+y=\psi^{i_1}+\psi^{i_2}+\cdots+\psi^{i_k} \qquad ③$$

其中

$$i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_k$$

是非负整数,且不必两两不同. 例如,若 x 增加 1,则式 ③ 多加 ψ;若 y 增加 1,则式 ③ 多加 ψ^0.

考虑所有式 ③ 中 k 是最小时的情形,此时,i_1 有最小值 j_i,i_2 有最小值 j_2,……,类似地得到 $j_3,j_4,\cdots,j_k$,且有

$$j_1 \leqslant j_2 \leqslant \cdots \leqslant j_k, \psi x + y = \sum_{r=1}^{k} \psi^{j_r}$$

下面只要证明 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 两两不同.

假设存在 $r \in \{1,2,\cdots,k-1\}$，使得

$$j_r = j_{r+1}$$

当 $j_r \geqslant 2$ 时，由

$$2\psi^2 = 1 + \psi^3$$

用 $j_r - 2$ 和 $j_r + 1$ 代替 j_r 和 j_{r+1}，因此

$$\psi^{j_r} + \psi^{j_{r+1}} = 2\psi^{j_r} = \psi^{j_r - 2}(1 + \psi^3) = \psi^{j_r - 2} + \psi^{j_r + 1}$$

这与 j_r 是 i_r 的最小值矛盾.

当 $j_r = 0$ 时

$$\psi x + y = \sum_{r=1}^{k} \psi^{j_r}$$

中至少包含两个被加数均为 $\psi^0 = 1$.

注意到 $1 + \psi = \psi^2$ 和 k 的最小性，知 $\psi x + y$ 中 j_r 与 j_{r+1} 不是连续的整数，于是，对于所有的 $t, j_t \neq 1$，有

$$\psi x + y = \sum_{r=1}^{k} \psi^{j_r} > 2 + \psi^3 + \psi^5 + \cdots = 2 - \psi^2 = \phi$$

与 $\psi x + y < \phi$ 矛盾.

当 $j_r = 1$ 时，$\psi x + y$ 中至少包含两个被加数等于 ψ.

类似于 $j_r = 0$ 时的情形，对于所有的 $t, j_t \neq 0, j_t \neq 2$. 于是

$$\psi x + y = \sum_{r=1}^{k} \psi^{j_r} < 2\psi + \psi^4 + \psi^6 + \cdots = 2\psi - \psi^3 = -1$$

与 $\psi x + y > -1$ 矛盾.

回到原题.

设有序非负整数对 (x, y) 满足

$$-1 < \psi x + y < \phi$$

则存在正整数集的子集 J，使得

$$\psi x + y = \sum_{j \in J} \psi^{j-1}$$

与式 ② 比较得

$$\psi x + y = \psi a_J + b_J$$

由于 x, y, a_J, b_J 是整数，ψ 是无理数，则

$$x = a_J, y = b_J$$

即 $(x, y) \in S$.

综上

$$\alpha = \psi, \beta = 1, m = -1, M = \phi$$

满足条件.

4 对于正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，证明

$$\sum_{i<j}\frac{a_ia_j}{a_i+a_j}\leqslant\frac{n}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}\sum_{i<j}a_ia_j$$

证明 设

$$S=\sum_{i=1}^{n}a_i$$

由于

$$\sum_{i<j}(a_i+a_j)=(n-1)S$$

则

$$\sum_{i<j}\frac{a_ia_j}{a_i+a_j}=\sum_{i<j}\frac{1}{4}\left[a_i+a_j-\frac{(a_i-a_j)^2}{a_i+a_j}\right]=$$

$$\frac{n-1}{4}S-\frac{1}{4}\sum_{i<j}\frac{(a_i-a_j)^2}{a_i+a_j} \quad ①$$

又因

$$(n-1)\sum_{i<j}a_ia_j=\frac{n-1}{2}(S^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^2)$$

所以

$$\sum_{i<j}a_ia_j=\frac{1}{2}\sum_{i<j}[a_i^2+a_j^2-(a_i-a_j)^2]=$$

$$\frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\frac{1}{2}\sum_{i<j}(a_i-a_j)^2$$

两式相加得

$$n\sum_{i<j}a_ia_j=\frac{n-1}{2}S^2-\frac{1}{2}\sum_{i<j}(a_i-a_j)^2$$

故

$$\frac{n}{2S}\sum_{i<j}a_ia_j=\frac{n-1}{4}S-\frac{1}{4}\sum_{i<j}\frac{(a_i-a_j)^2}{S} \quad ②$$

比较式 ① 与 ②，因为

$$S\geqslant a_i+a_j$$

所以

$$\sum_{i<j}\frac{a_ia_j}{a_i+a_j}\leqslant\frac{n}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}\sum_{i<j}a_ia_j$$

5 设 a,b,c 是一个三角形的三边长. 证明

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\leqslant 3$$

证法 1 注意到

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}>\sqrt{c},\sqrt{b}+\sqrt{c}>\sqrt{a},\sqrt{c}+\sqrt{a}>\sqrt{b}$$

设

$$x=\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a},y=\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b},z=\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$$

则 $x,y,z>0$,有

$$b+c-a=\left(\frac{z+x}{2}\right)^2+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2=$$

$$\frac{x^2+xy+xz-yz}{2}=$$

$$x^2-\frac{1}{2}(x-y)(x-z)$$

故

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}=\sqrt{1-\frac{(x-y)(x-z)}{2x^2}}\leqslant$$

$$1-\frac{(x-y)(x-z)}{4x^2}$$

其中,最后一步用到了不等式

$$\sqrt{1+2u}\leqslant 1+u$$

同理

$$\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}\leqslant 1-\frac{(y-z)(y-x)}{4y^2}$$

$$\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\leqslant 1-\frac{(z-x)(z-y)}{4z^2}$$

将上面三式相加,只需证明

$$\frac{(x-y)(x-z)}{x^2}+\frac{(y-z)(y-x)}{y^2}+\frac{(z-x)(z-y)}{z^2}\geqslant 0 \quad ①$$

不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$,于是

$$\frac{(x-y)(x-z)}{x^2}=\frac{(y-x)(z-x)}{x^2}\geqslant\frac{(y-x)(z-y)}{y^2}=$$

$$-\frac{(y-z)(y-x)}{y^2}-\frac{(z-x)(z-y)}{z^2}\geqslant 0$$

从而,式 ① 成立.

证法 2 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$. 于是

$$\sqrt{a+b-c}-\sqrt{a}=\frac{(a+b-c)-a}{\sqrt{a+b-c}+\sqrt{a}}\leqslant\frac{b-c}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\sqrt{b}-\sqrt{c}$$

因此

$$\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\leqslant 1$$

设

$$p=\sqrt{a}+\sqrt{b},q=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

则

$$a-b=pq, p\geqslant 2\sqrt{c}$$

由柯西不等式有

$$\left(\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2=$$

$$\left(\frac{\sqrt{c-pq}}{\sqrt{c}-q}+\frac{\sqrt{c+pq}}{\sqrt{c}+q}\right)^2\leqslant$$

$$\left(\frac{c-pq}{\sqrt{c}-q}+\frac{c+pq}{\sqrt{c}+q}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{c}-q}+\frac{1}{\sqrt{c}+q}\right)=$$

$$\frac{2(c\sqrt{c}-pq^2)}{c-q^2}\ \frac{2\sqrt{c}}{c-q^2}=4\cdot\frac{c^2-\sqrt{c}pq^2}{(c-q^2)^2}\leqslant$$

$$4\cdot\frac{c^2-2cq^2}{(c-q^2)^2}\leqslant 4$$

从而

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}\leqslant 2$$

结合式 ① 即得所证不等式.

6 求最小的实数 M,使得对所有的实数 a,b,c,有

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)|\leqslant M(a^2+b^2+c^2)^2$$

解 此题答案与本届 IMO 试题的第 3 题答案相同.

组合部分

1 有 $n(n\geqslant 2)$ 盏灯 $L_1,L_2,\cdots,L_n$,它们要么开着,要么关着.我们每秒钟按照下列方法同时改变某些灯的开关状态:若前一秒钟 $L_i(i=1,2,\cdots,n)$ 和与其相邻的灯(当 $i=1$ 或 $i=n$ 时,仅有一盏灯与其相邻,其他情况有两盏灯与其相邻)处在相同的开关状态,则将 L_i 关上;否则,将 L_i 开着.开始时,只有最左边的一盏灯是开着的.证明:

(1) 存在无穷多个 n,能使得所有的灯都是关着的;

(2) 存在无穷多个 n,能使得所有的灯不都是关着的.

证明 (1) 取 $n=2^k$.

设 A_k 是 $2^k\times 2^k$ 阶矩阵,每个元素要么是 0,要么是 1(0 表示灯是关着的,1 表示灯是开着的),每行表示 n 盏灯在某一时刻的状态.第一行为开始时的状态$(1,\underbrace{0,0,\cdots,0}_{2^k-1个})$,第 $i+1$ 行是第 i 行经过改变后得到的 n 盏灯的状态.

下面证明：经过 2^k-1 次改变后，可使第 n 行 n 盏灯的状态为 $(1,1,\cdots,1)$，再经过一次改变即可使其变为 $(0,0,\cdots,0)$，从而，所有灯都是关着的.

用数学归纳法证明.

当 $k=1$ 时，显然成立.

假设当 $k\geqslant 1$ 时，结论成立.

对于 $k+1$ 时，设 $2^{k+1}\times 2^{k+1}$ 阶矩阵

$$A_{k+1}=\begin{pmatrix}A_k & O_k\\ B_k & C_k\end{pmatrix}$$

其中，A_k,O_k,B_k,C_k 是 $2^k\times 2^k$ 阶矩阵. m 步以后，第 $m+1$ 行中的最后一个 1 在第 $m+1$ 个，从而，O_k 是一个零矩阵. 由归纳假设，(A_k,O_k) 的最后一行为 $(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{2^k\text{个}},\ \underbrace{0,0,\cdots,0}_{2^k\text{个}})$，下一行为 $(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{2^k-1\text{个}},1,1,\underbrace{0,0,\cdots,0}_{2^k-1\text{个}})$，是关于其中点对称的. 因此，以后的每一行也都是关于中点对称的，即 B_k 与 C_k 是镜像对称的. 特别地，B_k 最右边的列与 C_k 最左边的列相同.

可以将 C_k 从 A_{k+1} 中分离出来，这是因为 C_k 中每行的第一项只依赖两个元素. 由对称性知 A_{k+1} 中，和 C_k 中第一列元素在左边相邻的元素与 C_k 中第一列元素相同，因此，C_k 每一步的变化等价于 (B_k,C_k) 每一步的变化. 由于 C_k 的第一行为 $(1,\underbrace{0,0,\cdots,0}_{2^k-1\text{个}})$，由归纳假设，可知 $C_k=A_k$. 由对称性可得，B_k 的最后一行与 C_k 的最后一行都是 $(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{2^k\text{个}})$. 从而，$A_{k+1}$ 的最后一行为 $(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{2^{k+1}\text{个}})$.

(2) 取 $n=2^k+1(k\geqslant 1)$.

考虑 2^k+1 列、无穷行的矩阵 A. 由情形(1)可得前 2^k 行、2^k 列即为矩阵 A_k，前 2^k 行最右边一列全是 0. 下一行为 $(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{2^k-1\text{个}},1,1)$，这是 A 的第二行反序排列的情形，如此反复，在这两个状态之间变化.

由于在 $(1,1,\underbrace{0,0,\cdots,0}_{2^k-1\text{个}})$ 到 $(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{2^k-1\text{个}},1,1)$ 的变化过程中不出现 $(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{2^k+1\text{个}})$，因此，所有的灯不都是关着的.

❷ 设 P 为正 2 006 边形. 如果 P 的一条对角线的两端将 P 的边界分成两部分，每部分都包含 P 的奇数条边，那么，该对角线称为“好边”. 规定 P 的每条边均为好边.

已知 2 003 条在 P 内部不相交的对角线将 P 分割成若干个三角形. 试问在这种分割之下，最多有多少个有两条好边的等腰三角形?

解 此题答案与本届 IMO 试题的第 2 题答案相同.

❸ 设 S 是平面上的有限点集，任意三点不共线. 对于顶点属于 S 的每一个凸多边形 P，设 P 的顶点数目为 $a(P)$，属于 S 且在 P 的外部的点的数目为 $b(P)$. 证明：对于任意的实数 x，$\sum\limits_{P} x^{a(P)}(1-x)^{b(P)}=1$，其中，$P$ 取遍 S 中的所有凸多边形(包括三角形，且一条线段、一个点和空集也认为分别是凸 2 边形、凸 1 边形和凸 0 边形).

解 设 S 中有 n 个点，对于顶点在 S 中的每一个凸多边形 P，设 $c(P)$ 为在 P 内且属于 S 的点的数目. 于是

$$a(P)+b(P)+c(P)=n$$

设

$$1-x=y$$

则有

$$\begin{aligned}\sum_{P} x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} &= \sum_{P} x^{a(P)} y^{b(P)} = \\ &\sum_{P} x^{a(P)} y^{b(P)}(x+y)^{c(P)} = \\ &\sum_{P}\sum_{i=0}^{c(P)} \mathrm{C}_{c(P)}^{j} x^{a(P)+i} y^{b(P)+c(P)-i}\end{aligned}$$

这是关于 x,y 的 n 次齐次多项式.

对于固定的 $r(0\leqslant r\leqslant n)$，$x^r y^{n-r}$ 的系数为：选一个凸多边形 P，再在 P 的内部选取一些属于 S 的点，使得 P 的顶点的数目与在 P 的内部选的顶点的数目的和等于 r 的所有选取方法的数目. 这对应着在 S 中选 r 个点的选取方法的数目. 这个对应是双射，这是因为 S 中的每个子集 T 有唯一的方法分成两个不交的集合，其中，一个是 T 的凸包，另一个是 T 的凸包内部的点.

因此，$x^r y^{n-r}$ 的系数为 C_n^r. 于是

$$\sum_{P} x^{a(P)} y^{b(P)} = \sum_{r=0}^{n} \mathrm{C}_n^r x^r y^{n-r} = (x+y)^n = 1$$

4 有一个由 n^2 个单位正方形组成的 $n\times n$ 的正方形蛋糕，将一些草莓放在一些单位正方形内.

放法 A：每行每列恰有一个草莓.

放法 B：每行每列恰有一个草莓，且对于每一个以蛋糕左上角的顶点为一个顶点的格点矩形，包含放法 B 中的草莓不少于包含放法 A 中的草莓.

证明：放法 B 可以由放法 A 经过若干次如下的操作得到：每次操作是选择两个草莓，使得这两个草莓分别在一个格点矩形的右上角和左下角，将这两个草莓放到矩形的另外两个角上.

证明 如图 47.2，用大写字母表示单位正方形. O 是左上角的单位正方形.

设 X,Y 是任意两个单位正方形. 用 $[XY]$ 表示包含 X,Y 的最小的格点矩形. 放法 A：在某些方格内放草莓，放法 B：将放草莓的方格用李子替换. 对于一个方格 X，设 $a(X)$，$b(X)$ 分别表示 $[OX]$ 中草莓、李子的数目. 由假设，对于所有的 X，有

$$a(X)\leqslant b(X)$$

且对于某些 x，等号是不成立的(否则，放法 A 就是放法 B).

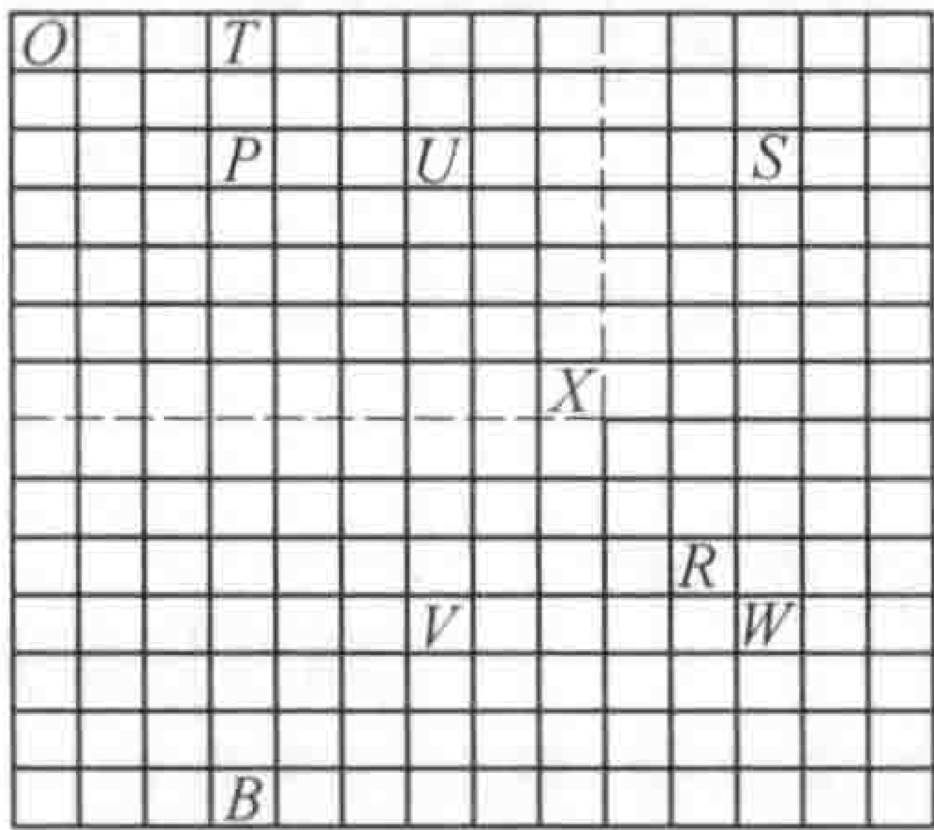


图 47.2

下面证明：操作一次后，将 A 变为 A'，且满足对于所有的 X，有

$$a(X)\leqslant a'(X)\leqslant b(X),\sum_X a(X)<\sum_X a'(X) \qquad ①$$

其中，$a'(X)$ 表示对于放法 A'，$[OX]$ 中草莓的数目，求和号中的 X 取遍所有单位正方形.

若如上的结论成立，且 A' 与 B 不同，则对 A' 进行同样的操作得到放法 A''，如此下去.

因为

$$\sum_X a(X)<\sum_X a'(X)<\sum_X a''(X)<\cdots$$

且所有的和不超过$\sum_X b(X)$,所以,总在某次操作后,使得和中的每个被加数分别等于相应的$b(X)$.从而,所有草莓与李子重合.

考虑从上面开始,使得首先出现的李子和草莓不在同一个方格内的行,分别设李子、草莓在方格P,S内,因此,方格P一定在方格S的左边.设过方格P的列,最上面的方格为T,最下面的方格为B,则这一列中的草莓在李子的下面(这是因为在方格P上面的行,草莓与李子分别放在同一个单位正方形内,因此,在方格P所在的列的上方不会有草莓,否则,这一列中就至少有两个李子了),于是,在$[PS]$的下面的矩形$[BS]$内至少有一个草莓.

设方格V是这个区域中放有草莓的,最上面的单位正方形,方格V所在的行与方格S所在的列的交设为方格W.方格R在方格W的左上角,且与方格W只有一个公共点,则对所有$X\in[PR]$,有

$$a(X)<b(X) \quad ②$$

这是因为$X\in[PR]$,则在矩形$[OX]$中,$[TB]$左边李子的数目不少于草莓的数目;在$[PS]$上面的行,李子与草莓的数目相同;在余下的区域$[PX]$内没有草莓,方格P处有一个李子.

下面进行如下操作:设过方格V的列与过方格P的行的交为方格U(P,U,R可能是同一个单位正方形),将方格S,V处的草莓放到方格U,W处,则对于$X\in[UR]$,有

$$a'(X)=a(X)+1$$

对于其他的x,有

$$a'(X)=a(X)$$

由于矩阵$[UR]$包含在$[PR]$中,因此,由式②知

$$a'(X)\leqslant b(X)$$

对所有X成立.

对于如上的操作,得到的方法A'满足式①,从而,要证明的结论成立.

5 一场(n,k)一赛是指n个选手进行k轮比赛,使得:

(1)每个选手参加每一轮的比赛,每两个选手最多进行一场比赛;

(2)若选手A与选手B在第i轮进行比赛,选手C与选手D也在第i轮进行比赛,当选手A在第j轮与选手C进行比赛时,则选手B与选手D也在第j轮进行比赛.

求存在一场(n,k)一赛的所有数对(n,k).

解 对于每一个k,设t_k是满足

$$2^{t_k-1} < k+1 \leqslant 2^{t_k}$$

的唯一整数.

下证:一场(n,k)一赛存在当且仅当 $2^{t_k} \mid n$.

首先证明:若 $n=2^t(t\in \mathbf{N}_+)$,则对于所有 $k\leqslant 2^t-1$,存在一场(n,k)一赛.

设 S 是长度为 t 的 $0-1$ 序列构成的集合.由于 S 中恰有 2^t 个元素,故可用任意一种方式将 S 中的元素作为这 2^t 个选手的标号.若 $\alpha,\beta\in S$,定义 $\alpha+\beta$ 是 α,β 的对应项的和模 2 的余数,即定义

$$0+0=0,0+1=1+0=1,1+1=0$$

从而

$$\alpha+\beta\in S$$

对于每个 $i(i=1,2,\cdots,2^t-1)$,设 $\omega(i)$ 为 i 的二进制表示,如果位数小于 t,则在 $\omega(i)$ 的前面补上一些 0,使 $\omega(i)\in S$.

下面安排一场(n,k)一赛,其中

$$n=2^t,k\leqslant 2^t-1$$

对于所有的 $i(i=1,2,\cdots,k)$,选手 $\alpha\in S$ 与选手 $\alpha+\omega(i)$ 在第 i 轮进行比赛.

由于

$$\alpha+\omega(i)\in S$$

且

$$\alpha+\omega(i)=\beta+\omega(i)$$

表明 $\alpha=\beta$,同时

$$(\alpha+\omega(i))+\omega(i)=\alpha$$

因此,这样进行比赛是可行的.

每位选手在每轮中都进行比赛,每两名选手最多进行一场比赛(若 $k=2^t-1$,则每两名选手恰进行一场比赛).若 $i\neq j$,则

$$\omega(i)\neq\omega(j)$$

于是,满足条件(1).

设 α 与 β 在第 i 轮进行比赛,γ 与 δ 在第 i 轮进行比赛,α 与 γ 在第 j 轮进行比赛,则

$$\beta=\alpha+\omega(i),\delta=\gamma+\omega(i),\gamma=\alpha+\omega(j)$$

于是,β 在第 j 轮与

$$\begin{aligned}\beta+\omega(j)=(\alpha+\omega(i))+\omega(j)=\\(\alpha+\omega(j))+\omega(i)=\\\gamma+\omega(i)=\delta\end{aligned}$$

进行比赛.因此,满足条件(2).

故对于

$$n=2^t,k\leqslant 2^t-1$$

存在一场(n,k)一赛.

对于$n=2^t s$,s为奇数,$k\leqslant 2^t-1$,将n分成s个2^t,要安排s个不同的$(2^t,k)$一赛$T_1,T_2,\cdots,T_s$,合起来得到每轮都是$T_1,T_2,\cdots,T_s$中相应轮次的一场$(2^t s,k)$一赛T.

综上所述,若$2^{t_k}\mid n$,则存在一场(n,k)一赛.

反之,考虑任意一场(n,k)一赛.

用n个不同的点来表示这n个选手,每一轮后,在这一轮中比赛过的两名选手对应的点之间连一条边,于是,第$i(i=1,2,\cdots,k)$轮后,对应着一个图G_i.若在图G_i中存在一条由边构成的从P到Q的通路,即存在

$$P=X_1,X_2,\cdots,X_m=Q$$

满足X_j与$X_{j+1}(j=1,2,\cdots,m-1)$在前$i$轮中的某个轮次中进行了比赛,则称选手$Q$与选手$P$是"$i$—相邻"的.一名选手的所有$i$—相邻的选手构成的集合称为它的"$i$—分量".显然,两个$i$—分量要么不交,要么相同.

因此,第i轮后,选手被分成若干个两两不交的i—分量.于是,只要证明所有的k—分量中元素的数目可以被2^{t_k}整除.

观察选手A的i—分量Γ在第$i+1$轮后的变化.假设A与B在第$i+1$轮进行比赛,B的i—分量为Λ(Γ与Λ可以相同).

下面证明:在第$i+1$轮Γ中的每个选手与Λ中的一个选手进行比赛,反之亦然.

实际上,设C是Γ中的任意一个选手,且C在第$i+1$轮与D进行比赛.由于C与A是i—相邻的,则存在选手序列

$$A=X_1,X_2,\cdots,X_m=C$$

其中,X_j与$X_{j+1}(j=1,2,\cdots,m-1)$在前$i$轮的某个轮次中进行过比赛.设$X_j(j=1,2,\cdots,m)$在第$i+1$轮与$Y_j$进行了比赛,特别地,设

$$Y_1=B,Y_m=D$$

选手Y_j满足条件(1).

假设X_j与X_{j+1}在第$r(r\leqslant i)$轮进行了比赛,由条件(2),可得Y_j与Y_{j+1}在第r轮进行了比赛,于是

$$B=Y_1,Y_2,\cdots,Y_m=D$$

是G_i中,由B到D的一条通路,即D在B的i—分量中.

由对称性,Λ中的每个选手在第$i+1$轮与Γ中的一个选手进行比赛,故Γ和Λ中元素的数目相同.因此,A的$(i+1)$—分量是$\Gamma\cup\Lambda$.

因为Γ和Λ要么不交,要么相同,所以,要么

$$|\Gamma\cup\Lambda|=2|\Gamma|$$

要么

$$|\Gamma\cup\Lambda|=|\Gamma|$$

其中，$|P|$ 表示有限集 P 中元素的个数.

设 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_k$ 分别是 A 的1—分量，2—分量，……，k—分量，则要么

$$|\Gamma_{i+1}|=2|\Gamma_i|$$

要么

$$|\Gamma_{i+1}|=|\Gamma_i|,i=1,2,\cdots,k-1$$

因 $|\Gamma_1|=2$，所以，每个 $|\Gamma_i|$ $(i=1,2,\cdots,k-1)$ 都是2的整数次幂，特别地，对于某个正整数 u，有

$$|\Gamma_k|=2^u$$

又由条件(1)，选手 A 与 k 个不同的选手进行了比赛，他们都属于 Γ_k，因此

$$|\Gamma_k|\geqslant k+1$$

于是

$$2^u\geqslant k+1$$

由 t_k 是满足 $2^{t_k}\geqslant k+1$ 的最小整数，则 $u\geqslant t_k$. 故每个 k—分量中元素的个数都能被 2^{t_k} 整除.

6 有一个边长为 n 的头朝上的正三角形纸板 T，其内部有 n 个头朝上的单位正三角形的洞，一颗钻石是内角为 $60°$ 和 $120°$ 的边长为1的菱形. 证明：T 能被钻石镶嵌当且仅当 T 中每个头朝上的边长为 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 的三角形中最多包含 k 个洞.

注 所有三角形的顶点都在 T 的格点上，所有三角形的边都在 T 的格线上，钻石不是镶嵌在洞中.

证明 必要性. 假设一个带洞正三角形 T 可以被钻石镶嵌，设 T' 是 T 中的边长为 k 的正三角形，其内有 h 个洞. 则每颗钻石可以覆盖 T' 中的一个或两个单位正三角形. 设镶嵌着钻石的 T' 为 R.

由于 T' 的边界都是头朝上的单位正三角形，则 R 是由一个边长为 k 且有 h 个洞的正三角形和一些不在 T' 内的头朝下的单位正三角形组成的. 于是，R 内恰有 $\frac{k^2+k}{2}-h$ 个头朝上的单位正三角形，至少有 $\frac{k^2-k}{2}$ 个头朝下的单位正三角形(不包括 T' 外部的). 又每颗钻石包含一个头朝上的单位正三角形和一个头朝下的单位正三角形，则

$$\frac{k^2+k}{2}-h \geqslant \frac{k^2-k}{2}$$

从而，$k \geqslant h$.

充分性. 若 T 中的每个边长为 k 的正三角形中最多有 k 个洞，则称 T 中的洞构成的集合为“可伸展的”. 对于任意一个可伸展的集合 S，若一个边长为 k 的正三角形中恰包含 S 中的 k 个洞，则称这个正三角形为 S 的“满的”三角形.

引理 对于 T 中的可伸展的集合 S，若 T'，T'' 是 S 的满的三角形，且 T'，T'' 不相离，设 $T'+T''$ 是 T 中包含 T'，T'' 的最小的正三角形，则 $T'+T''$ 也是 S 的满的三角形.

引理的证明 设正三角形 T'，T''，$T' \cap T''$，$T'+T''$ 的边长分别为 a,b,c,d，且分别包含 S 中的 a,b,x,y 个洞（$T' \cap T''$ 可能是一个点，此时，$c=x=0$）.

因为 S 是可伸展的，所以

$$x \leqslant c, y \leqslant d$$

又因为

$$a+b=c+d$$

且

$$a+b \leqslant x+y$$

（其中，$T' \cap T''$ 中的洞算了两次，属于 $T'+T''$，但不属于 T' 和 T'' 的区域中可能还有洞），所以

$$x=c, y=d$$

回到原题. 设 T_n 是一个边长为 n 的带洞的三角形，其洞构成的集合 H 是可伸展的. 下面对 n 用数学归纳法证明：T_n 是被钻石镶嵌的.

当 $n=1$ 时，结论显然成立.

假设当 $n \geqslant 2$ 时，对于所有边长小于 n 的带洞三角形结论成立.

对于边长为 n 的正三角形 T_n，设 B 是 T_n 的最下面的一行，T' 是 T_n 前 $n-1$ 行构成的正三角形，则 T' 最多有 $n-1$ 个洞，B 最少有一个洞.

若 B 中恰有一个洞，则 B 可以用唯一的方法被钻石镶嵌，此时，T' 中恰包含 $n-1$ 个洞，且其边长为 $n-1$，其包含的洞的集合是可伸展的.

由归纳假设，T' 是可以被钻石镶嵌的.

若 B 中有 $m(m \geqslant 2)$ 个洞，从左到右将它们记为

$$a_1, a_2, \cdots, a_m$$

设 l 是 B 与 T' 的交线.

对于每个 $i(i=1,2,\cdots,m-1)$，在 a_i 与 a_{i+1} 之间选一个底在

l 上且头朝上的单位正三角形 b_i，且 b_i 不是 T_n 的洞（这样的 b_i 是一定存在的，否则，包含 a_i 和 a_{i+1} 的最小的正三角形中洞的数目大于这个正三角形的边长），将一个钻石镶嵌在 b_i 处，使得头朝下的单位正三角形在 B 内，从而，B 中余下的区域可以用唯一的方法被钻石镶嵌.

在 T_n 中删除 B 和 $b_1,b_2,\cdots,b_{m-1}$，得到一个边长为 $n-1$ 的带洞正三角形 T_{n-1}. 如果恰当地选择 $b_1,b_2,\cdots,b_{m-1}$，使得用 b_1，$b_2,\cdots,b_{m-1}$ 代替 $a_1,a_2,\cdots,a_{m-1}$ 后，新得到的洞的集合还是可伸展的，则由归纳假设即可证得结论成立.

下面证明：可以选到满足要求的 $b_1,b_2,\cdots,b_{m-1}$.

按照 $b_1,b_2,\cdots,b_{m-1}$ 的次序，每次确定一个，使得满足要求，从而，$m-1$ 次后，即可得到满足要求的 $b_1,b_2,\cdots,b_{m-1}$.

因此，只要选择出满足条件的 b_1 即可.

设

$$a_1=u, a_2=v$$

Λ 是包含 u 上面的顶点、底边在 l 上且是 H 的满的最大的正三角形（图 47.3），称 Λ 是 u 的"同伴". 设 Λ 的边长为 r，则 Λ 包含 T_n 中的 r 个洞. 向下延长其两条斜边至 B 的底边，得到边长为 $r+1$ 的正三角形 Λ'，则 Λ' 中包含洞 u，即 Λ' 中至少有 $r+1$ 个洞. 因此，Λ' 不可能包含 v. 从而，Λ 不包含 v 的顶点.

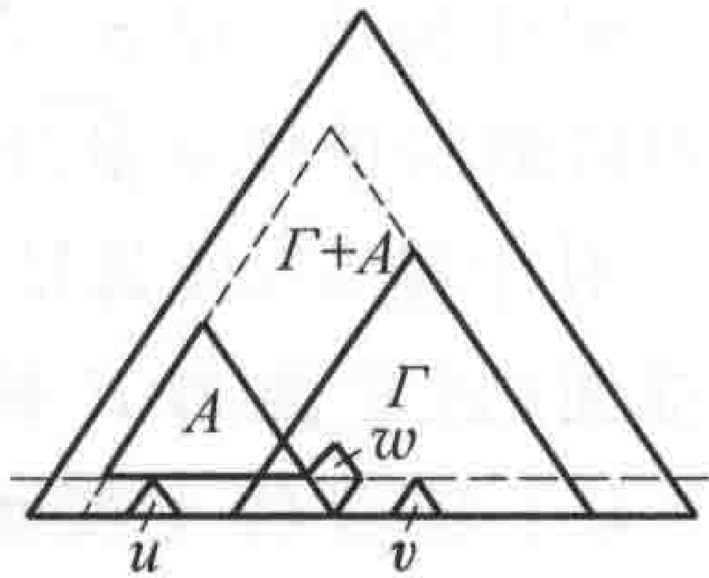


图 47.3

设 w 是底边在 l 上且在 Λ 的右边，与 Λ 有一个公共点的单位正三角形，因此，w 在 v 的左边，且 w 不是洞. 否则，可以扩展到一个边长更大的 H 的满的正三角形.

下面证明：如果洞 u 被 w 代替，新的洞的集合仍然是可伸展的.

实际上，只要证明 T_n 中包含 w、不包含 u 的正三角形 Γ 不是 H 的满的正三角形.

假设 Γ 是 H 的满的正三角形，考虑包含 Γ，Λ（u 的同伴）的最小正三角形 $\Gamma+\Lambda$. 由于 Γ 包含 w，且 w 不在 Λ 内，则 $\Gamma+\Lambda$ 的边长大于 Λ 的边长. 因为 Γ，Λ 有公共点，且都不包含 u，由引理知 $\Gamma+\Lambda$ 是 $\dfrac{H}{\{u\}}$ 的满的正三角形.

若 Γ 在 l 的上方，则 $\Gamma+\Lambda$ 也在 l 的上方，与 Λ 是最大的正三角形矛盾. 若 Γ 包含 B 中的单位正三角形，则 $\Gamma+\Lambda$ 包含 u. 设 $\Gamma+\Lambda$ 的边长为 s. 由于 $\Gamma+\Lambda$ 是 $\dfrac{H}{\{u\}}$ 的满的正三角形，因此，包含 s 个不同于 u 的洞. 但是，$\Gamma+\Lambda$ 包含 u，矛盾.

从而，可知 Γ 不是 H 的满的正三角形.

对于 $a_1=u, a_2=v$，取 $b_1=w$，即知如此选取满足条件.

7 已知一个凸多面体的任意两条棱都不平行，任意一条棱都不与任意一个面平行（除非这条棱是两个面的公共棱）. 若有凸多面体的两个点，分别过这两个点存在两个平行平面，使得凸多面体夹在这两个平面之间，则称这两个点为一对"对应点". 设 A 是由凸多面体的顶点构成的对应点对的数目，B 是由凸多面体的棱的中点构成的对应点对的数目，试用凸多面体的顶点、棱、面的数目表示 A-B.

解 设凸多面体为 Γ，顶点、棱、面分别为

$$V_1, V_2, \cdots, V_n; E_1, E_2, \cdots, E_m; F_1, F_2, \cdots, F_l$$

E_i 的中点 $Q_i(i=1,2,\cdots,m)$. S 是一个单位球面上的所有单位向量的集合，将 Γ 的边界依照下列方法映射到 S 上.

对于面 F_i，设 $S^+(F_i)$，$S^-(F_i)$ 是面 F_i 分别指向 Γ 的外侧和 Γ 的内侧的单位向量. 因此，这两个点是 S 的对径点.

对于棱 E_j，设其是面 F_{i_1} 与 F_{i_2} 的交，考虑所有包含 E_j 的 Γ 的支撑面（该平面与 Γ 有公共点，且 Γ 都在该平面的同一侧），设 $S^+(E_j)$ 是这些支撑面指向 Γ 外侧的单位法向量的集合，则 $S^+(E_j)$ 是 S 的一个大圆上的一段弧，弧 $S^+(E_j)$ 垂直于 E_j，端点为 $S^+(F_{i_1})$ 和 $S^+(F_{i_2})$. 同理，定义指向 Γ 内侧的单位法向量集合 $S^-(E_j)$，且 $S^+(E_j)$ 与 $S^-(E_j)$ 关于球心（原点）对称.

如图 47.4，对于顶点 V_k，设其是棱 $E_{j_1}, E_{j_2}, \cdots, E_{j_h}$ 的公共的端点，且是面 $F_{i_1}, F_{i_2}, \cdots, F_{i_h}$ 的公共点，考虑所有过 V_k 的 Γ 的支撑面. $S^+(V_k)$ 是这些支撑面指向 Γ 外侧的单位法向量的集合，这是 S 上的一个区域，是以 $S^+(F_{i_1}), S^+(F_{i_2}), \cdots, S^+(F_{i_h})$ 为顶点，$S^+(E_{j_1}), S^+(E_{j_2}), \cdots, S^+(E_{j_h})$ 为边的球面多边形（图 47.5）. 设 $S^-(V_k)$ 是指向 Γ 内侧的单位法向量的集合，且 $S^+(V_k)$ 与 $S^-(V_k)$ 关于球心对称. $S^+(V_k)$ 在视觉上是凸的，它是一些半球面的交.

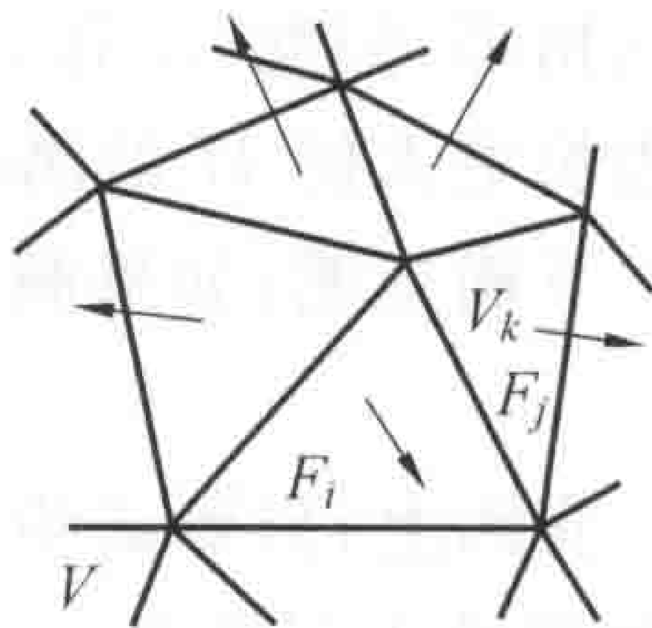


图 47.4

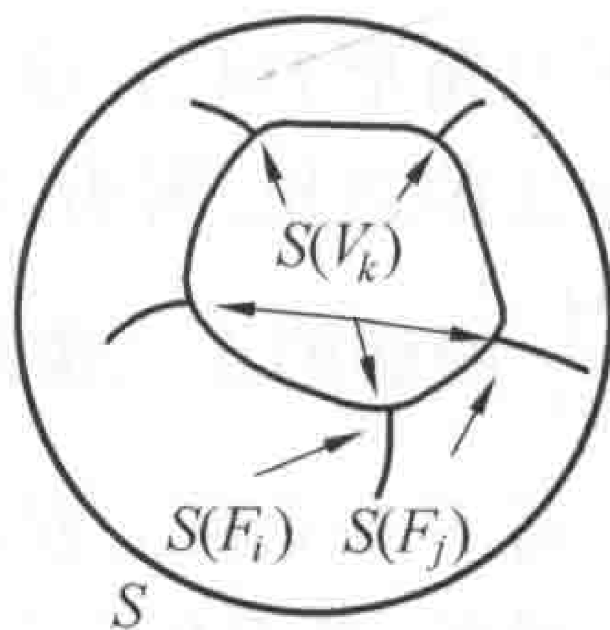


图 47.5

下面将 Γ 上的条件表达为在 S 上的像的条件：

(1) 多面体 Γ 没有平行棱——对于任意的 $i, j(i \neq j)$，包含弧 $S^+(E_i)$ 的大圆和包含 $S^-(E_j)$ 的大圆不同.

(2) 棱 E_i 不属于面 F_j 且 E_i 不平行于 F_j——包含弧 $S^+(E_i)$，$S^-(E_i)$ 的大圆不经过 $S^+(F_j)$，$S^-(F_j)$.

(3) Γ 没有平行面——$S^+(F_j)$ 与 $S^-(F_j)$ 两两不同.

区域 $S^+(V_k)$、弧 $S^+(E_j)$ 和点 $S^+(F_i)$ 给出了球面的一个分解. 区域 $S^-(V_k)$、弧 $S^-(E_j)$ 和点 $S^-(F_i)$ 也给出了球面的一个分解，且这两种分解关于球心对称.

引理 1　对于任意的 $i,j(1\leqslant i,j\leqslant n)$，区域 $S^-(V_i)$，$S^+(V_i)$ 重叠的充分必要条件是点 V_i，V_j 是一对对应点.

引理 1 的证明　由条件(1)，(2)，(3) 知，区域 $S^-(V_i)$ 和 $S^+(V_j)$ 的交不可能是一个顶点或一段弧，因此，$S^-(V_i)$ 与 $S^+(V_j)$ 要么不交，要么重叠.

假设 $S^-(V_i)$ 和 $S^+(V_j)$ 有公共的内点 U，设 p_1 和 p_2 是分别过 V_i 和 V_j 的 Γ 的支撑面，且 p_1 与 p_2 平行，单位法向量均为 U. 由 $S^-(V_i)$，$S^+(V_j)$ 的定义，U 是 p_1 指向内侧的单位法向量，也是 p_2 指向外侧的单位法向量，所以，多面体 Γ 在这两个平面 p_1，p_2 之间. 于是，V_i 和 V_j 是一对对应点.

反之，假设 V_i，V_j 是对应点对，则存在两个平行支撑面 p_1，p_2，且分别过点 V_i，V_j，Γ 在 p_1，p_2 之间. 设 U 是 p_1 指向内侧的单位法向量，则 U 是 p_2 指向外侧的单位法向量. 故

$$U\in S^-(V_i)\cap S^+(V_j)$$

即 $S^-(V_i)$ 与 $S^+(V_j)$ 有公共的内点. 因此，发生重叠.

引理 2　对任意 $i,j(1\leqslant i,j\leqslant m)$，弧 $S^-(E_i)$，$S^+(E_j)$ 相交的充分必要条件是边 E_i，E_j 的中点 Q_i，Q_j 是一对对应点.

引理 2 的证明　由条件(1)，(2)，弧 $S^-(E_i)$ 的端点不属于 $S^+(E_j)$；反之亦然. 因此，这两条弧要么不交，要么相交于内点.

假设弧 $S^-(E_i)$，$S^+(E_j)$ 相交于点 U，设 p_1，p_2 是分别过 E_i，E_j 的两个支撑面，且单位法向量为 U. 由弧 $S^-(E_i)$，$S^+(E_j)$ 的定义，U 是 p_1 指向内侧的单位法向量，也是 p_2 指向外侧的单位法向量. 于是，Γ 在 p_1 与 p_2 之间. 又因为 p_1，p_2 分别过 Q_i，Q_j，所以，Q_i，Q_j 是一对对应点.

反之，假设 Q_i，Q_j 是一对对应点，p_1，p_2 是分别过 Q_i，Q_j 的两个支撑面，由于一条棱不能与支撑面相交，则 E_i，E_j 分别在平面 p_1，p_2 内. 设 U 是 p_1 指向内侧的单位法向量，也是 p_2 指向外侧的单位法向量，则

$$U\in S^-(E_i)\cap S^+(E_j)$$

由于弧 $S^-(E_i)$ 与 $S^+(E_j)$ 不能不交，故一定相交.

现在给出球面 S 的一个新的分解. 在 S 上画出所有的弧 $S^+(E_i)$，$S^-(E_j)$，两条弧的公共点称为结点，则对应着 Γ 的面，在 $S^+(F_j)(i=1,2,\cdots,l)$ 处共有 l 个结点，在 $S^-(F_i)$ 处也共有 l 个结点. 由条件(3)，这些结点都是不同的. 由于存在某些 $i,j(1\leqslant i,j\leqslant m)$，使得弧 $S^-(E_i)$，$S^+(E_j)$ 相交，由引理 2，每对对应点 (Q_i,Q_j) 对应着两条弧相交，于是，所有交点的数目为 $2B$. 因此，所有结点的数目为 $2l+2B$.

又每个相交弧的结点将每条弧分成两部分，于是，弧的数目

增加两个. 对应着 Γ 的棱,开始时有 $2m$ 条弧,从而,最后的曲线段的数目为 $2m+4B$.

曲线段网将球面分成一些"新"的区域,每个新区域都是重叠的集合 $S^-(V_i)$ 和 $S^+(V_j)$ 的交. 由于凸性,两个重叠区域的交仍然是凸的. 由引理 1,每一对发生重叠的区域对应着一对对应点,每一对对应点对应着两个不同的重叠区域,且这两个重叠区域关于球心对称. 于是,新的区域的数目为 $2A$.

由欧拉定理有

$$n+l=m+2,(2l+2B)+2A=(2m+4B)+2$$

于是

$$A-B=m-l+1=n-1$$

因此,$A-B$ 比 Γ 的顶点的数目少 1.

几何部分

1 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,P 是 $\triangle ABC$ 内部的一点,满足

$$\angle PBA+\angle PCA=\angle PBC+\angle PCB$$

证明:$AP\geqslant AI$,并说明等号成立的充分必要条件是 $P=I$(图 47.6).

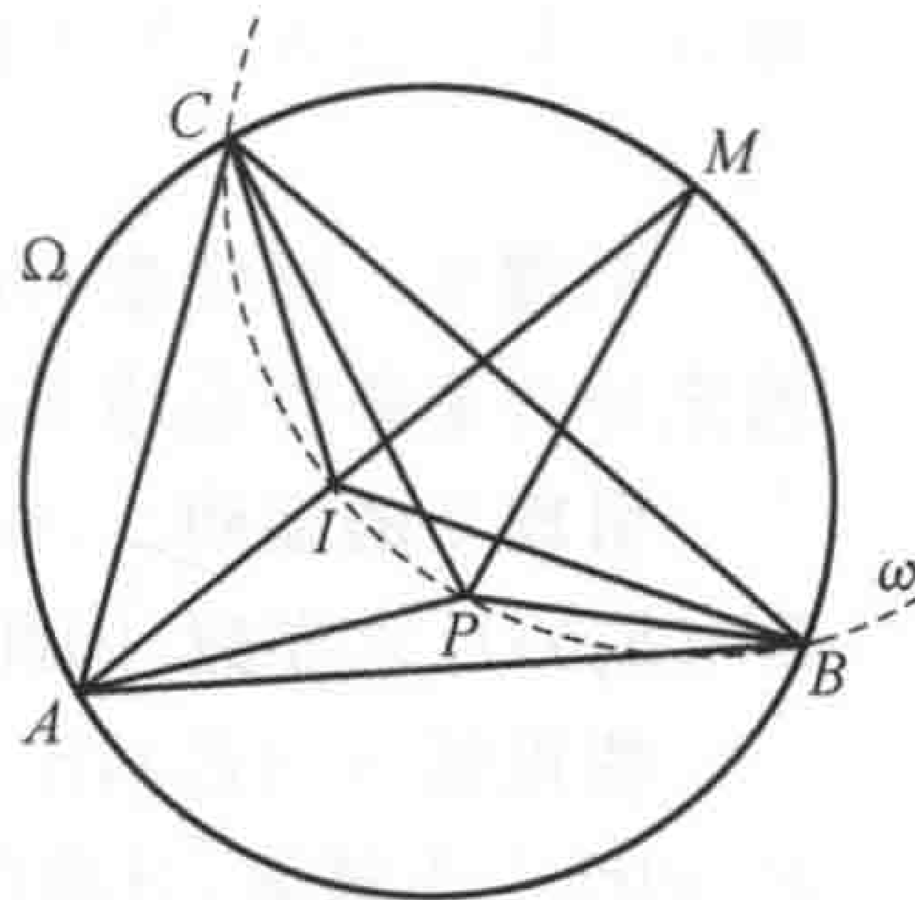


图 47.6

证明 此题答案与本届 IMO 试题的第 1 题答案相同.

2 已知梯形 $ABCD$ 的上、下底边满足 $AB>CD$,点 K,L 分别在边 AB,CD 上,且满足 $\frac{AK}{KB}=\frac{DL}{LC}$. 若在线段 KL 上存在点 P,Q,满足

$$\angle APB=\angle BCD,\angle CQD=\angle ABC$$

证明:P,Q,B,C 四点共圆.

证法 1 由

$$AB\parallel CD,\frac{AK}{KB}=\frac{DL}{LC}$$

知 AD,BC,KL 交于一点 S. 如图 47.7,设 SK 与 $\triangle ABP$,$\triangle CDQ$ 的外接圆的另一个交点分别为 X,Y. 则

$$\angle AXB=180^\circ-\angle APB=180^\circ-\angle BCD=\angle ABC$$

从而,BC 与 $\triangle ABP$ 的外接圆切于点 B.

同理,BC 与 $\triangle CDQ$ 的外接圆切于点 C.

于是

$$SP\cdot SX=SB^2$$

由于 S 是 $\triangle CDQ$ 的外接圆与 $\triangle BAX$ 的外接圆的位似中心，则有

$$\frac{SQ}{SX}=\frac{SX}{SB}\Rightarrow SP\cdot SQ=SB\cdot SC$$

故 P,Q,B,C 四点共圆.

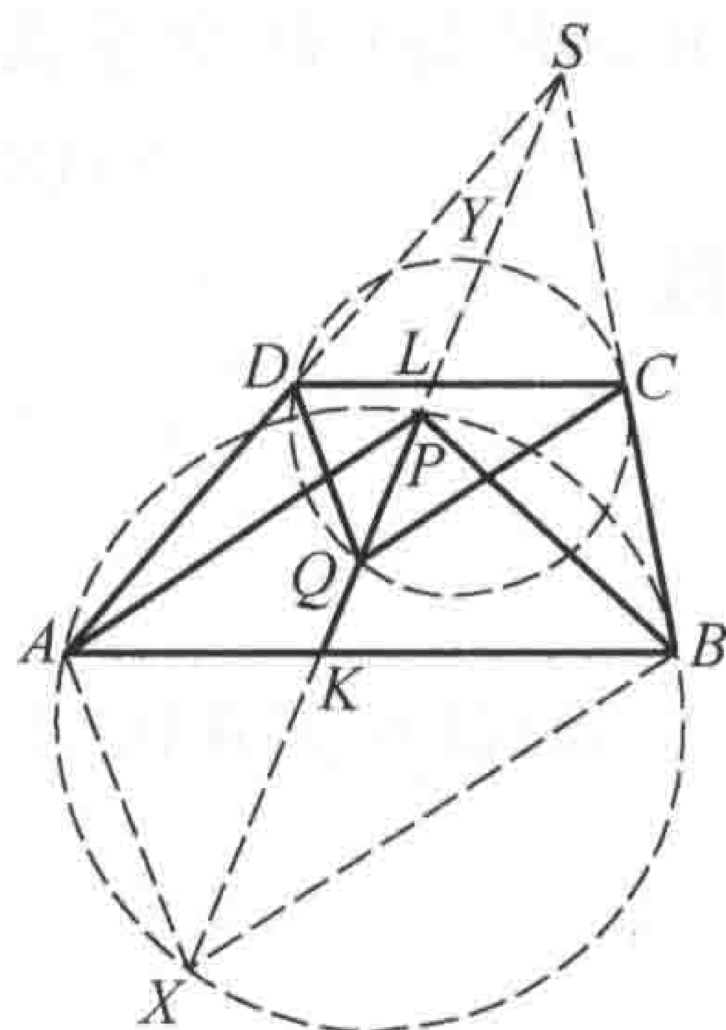


图 47.7

证法 2　如图 47.8，设 AD,KL,BC 交于点 S，AP,DQ 交于点 E，BP,CQ 交于点 F. 则

$$\angle EPF+\angle FQE=\angle BCD+\angle ABC=180^\circ$$

故 P,E,Q,F 四点共圆.

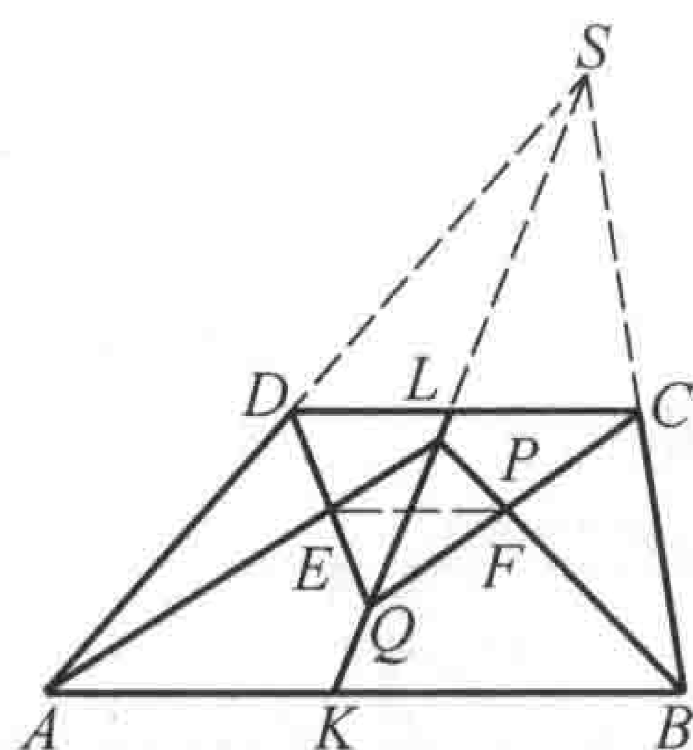


图 47.8

分别将 DQ,CQ 视为 $\triangle ASP,\triangle BSP$ 的梅涅劳斯线，由梅涅劳斯定理分别得

$$\frac{AD}{DS}\cdot\frac{SQ}{QP}\cdot\frac{PE}{EA}=1,\frac{BC}{CS}\cdot\frac{SQ}{QP}\cdot\frac{PF}{FB}=1$$

由于

$$AB\ /\!/\ CD$$

则

$$\frac{AD}{DS}=\frac{BC}{CS}$$

于是

$$\frac{PE}{EA}=\frac{PF}{FB}$$

从而

$$EF\ /\!/\ AB$$

又

$$\angle BCD=\angle BCF+\angle FCD=\angle BCQ+\angle EFQ=\angle BCQ+\angle EPQ$$

且

$$\angle BCD=\angle APB=\angle EPQ+\angle QPF$$

则

$$\angle BCQ=\angle QPF$$

无论点 Q 在 P,K 之间，还是点 P 在 Q,K 之间，均有 P,Q,B,C 四点共圆.

3 设凸五边形 $ABCDE$ 满足

$$\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE,\angle ABC=\angle ACD=\angle ADE$$

对角线 BD,CE 交于点 P. 证明：AP 平分线段 CD.

证明　如图 47.9，设对角线 AC,BD 交于点 Q，AD,CE 交于

点 R，AP 与 CD 交于点 M. 由已知可得

$$\triangle ABC \backsim \triangle ACD \backsim \triangle ADE$$

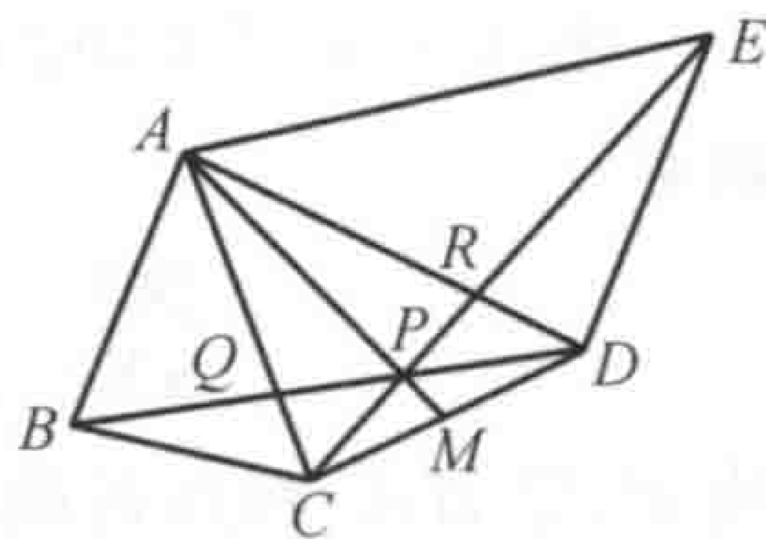


图 47.9

所以

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}=\frac{AD}{AE}$$

又

$$\angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=\angle CAD+\angle DAE=\angle CAE$$

则

$$\triangle ABD \backsim \triangle ACE$$

且 AQ，AR 分别是 $\triangle ABD$，$\triangle ACE$ 中 $\angle BAD$，$\angle CAE$ 的平分线.

于是

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AQ}{AR}$$

则

$$\frac{AQ}{AR}=\frac{AC}{AD}$$

因此

$$\frac{AQ}{AR}=\frac{QC}{RD}$$

在 $\triangle ACD$ 中，由塞瓦定理得

$$\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DR}{RA}=1$$

从而

$$CM=MD$$

4 已知 $\triangle ABC$ 满足 $\angle C<\angle A<90°$，D 为边 AC 上一点，且 $BD=BA$，$\triangle ABC$ 的内切圆与 AB，AC 分别切于点 K，L，$\triangle BCD$ 的内心为 J. 证明：KL 平分线段 AJ.

证明 如图 47.10，设 AJ，KL 交于点 P，过 J 作 KL 的平行线与 AC 交于点 M，则 P 是 AJ 的中点等价于

$$AM=2AL$$

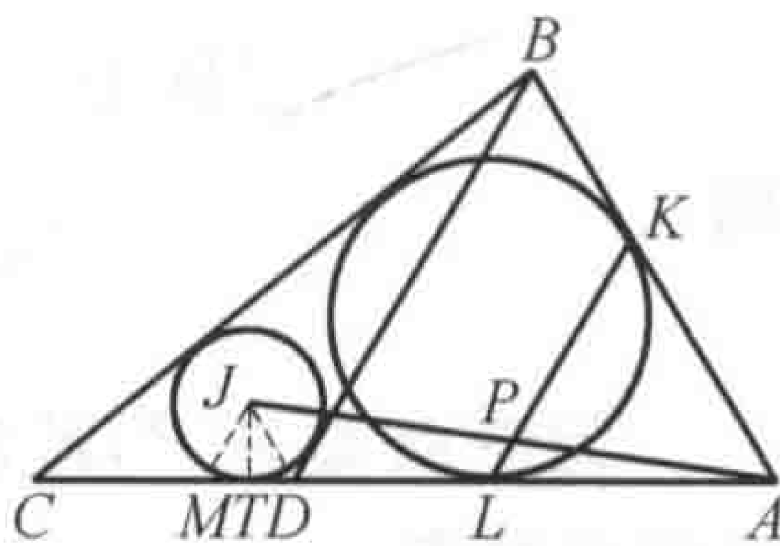


图 47.10

设

$$\angle BAC=2\alpha$$

则

$$\angle ADB=2\alpha$$

$$\angle ALK=90°-\alpha$$

$$\angle CDJ=\frac{1}{2}(180°-\angle ADB)=90°-\alpha$$

$$\angle DMJ=\angle ALK=90°-\alpha$$

所以

$$JD = JM$$

设 $\triangle BCD$ 的内切圆与边 CD 切于点 T，则

$$JT \perp CD$$

于是，JT 是等腰 $\triangle JMD$ 的底边 MD 上的高，从而

$$DT = MT$$

因此

$$AM = AD + (BD + CD - BC) =$$
$$AD + AB + DC - BC =$$
$$AC + AB - BC = 2AL$$

5 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A$ 内的旁切圆的圆心为 J，其与边 BC 及 AC，AB 的延长线的切点分别为 A_1，B_1，C_1. 若 $A_1B_1 \perp AB$，且垂足为 D，点 C_1 在边 DJ 上的投影为 E，求 $\angle BEA_1$ 和 $\angle AEB_1$ 的度数.

解法 1 如图 47.11，设 K 是 JC，A_1B_1 的交点

$$JC \perp A_1B_1$$

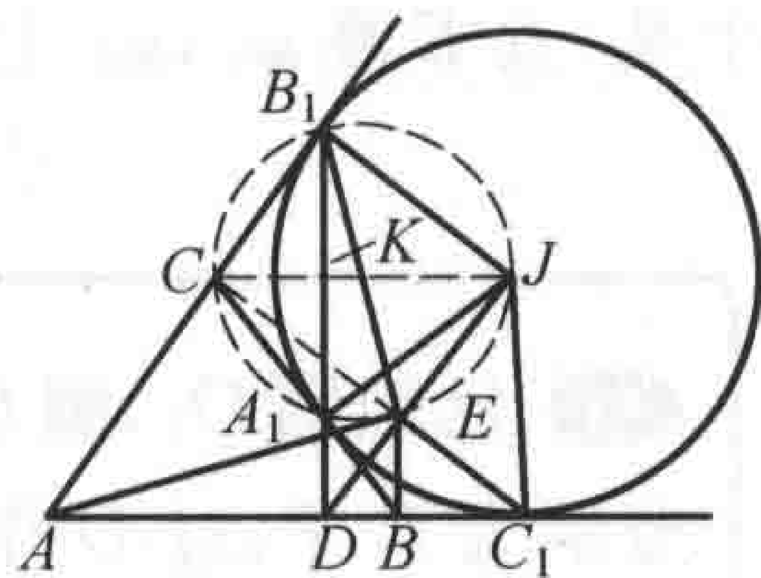


图 47.11

又因

$$A_1B_1 \perp AB$$

所以

$$JK \,/\!/\, C_1D$$

故

$$JC_1^2 = JB_1^2 = JC \cdot JK = JC \cdot C_1D$$

即

$$\frac{DC_1}{C_1J} = \frac{C_1J}{JC}$$

因此

$$\triangle DC_1J \backsim \triangle C_1JC \Rightarrow \angle C_1DJ = \angle JC_1C$$

这表明

$$DJ \perp C_1C$$

即 C_1，E，C 三点共线.

因为

$$\angle CA_1J = \angle CB_1J = \angle CEJ = 90^\circ$$

所以，A_1，B_1，E 在以 CJ 为直径的圆上. 于是

$$\angle DBA_1 = \angle A_1CJ = \angle DEA_1$$

从而，B，E，A_1，D 四点共圆，有

$$\angle BEA_1 = 90^\circ$$

因此

$$\angle EB_1A=\angle EJC=\angle EDC_1$$

所以,A,D,E,B_1 四点共圆.

故

$$\angle AEB_1=\angle ADB=90^\circ$$

解法 2　如图 47.12,设以 C_1D,A_1B,AB_1 为直径的圆分别为 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$,则 JC_1,JB_1,JA_1 分别与 $\omega_1,\omega_3,\omega_2$ 相切.

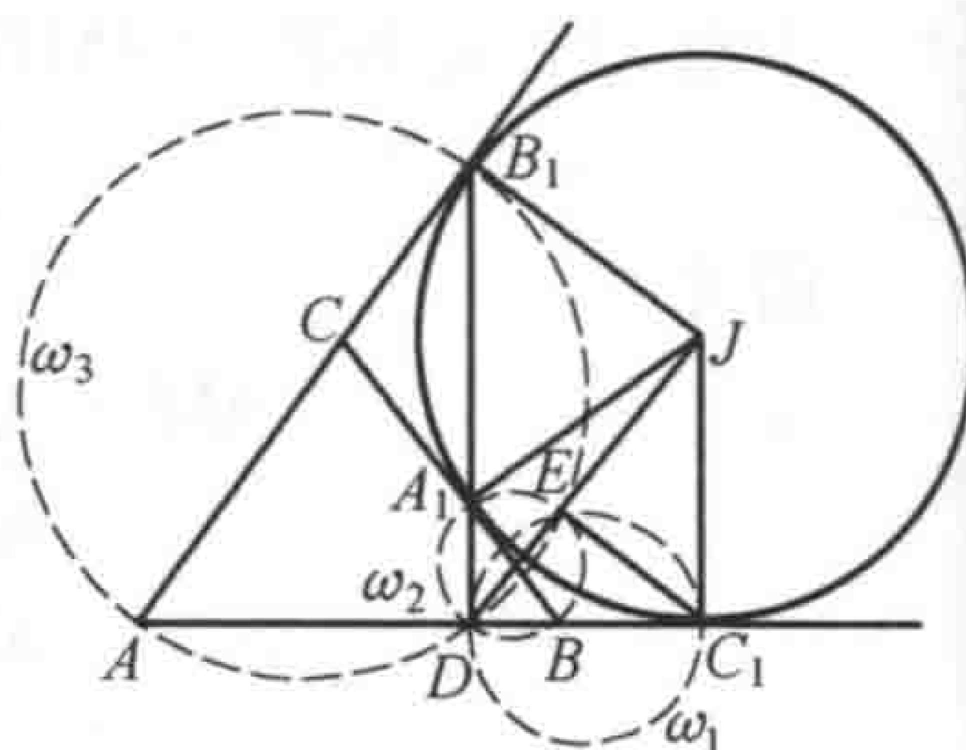


图 47.12

由

$$\angle ADB_1=\angle A_1DB=90^\circ$$

得 ω_2,ω_3 过点 D.

因为 $\angle C_1ED=90^\circ$,所以,点 E 在 ω_1 上.从而

$$JC_1^2=JD\cdot JE$$

又因为

$$JA_1=JB_1=JC_1$$

所以

$$JA_1^2=JD\cdot JE,JB_1^2=JD\cdot JE$$

于是,点 E 在 ω_2,ω_3 上.因此

$$\angle BEA_1=\angle AEB_1=90^\circ$$

6 已知圆 O_1,圆 O_2 外切于点 D,并同时与圆 w 内切,切点分别为 E,F,过 D 作圆 O_1,圆 O_2 的公切线 l.设圆 w 的直径 $AB\perp l$,使得 A,E,O_1 在 l 的同侧.证明:AO_1,BO_2,EF 三线共点.

证法 1　如图 47.13,设 AB 的中点为 O,知 E 为圆 ω 与圆 O_1 的位似中心.

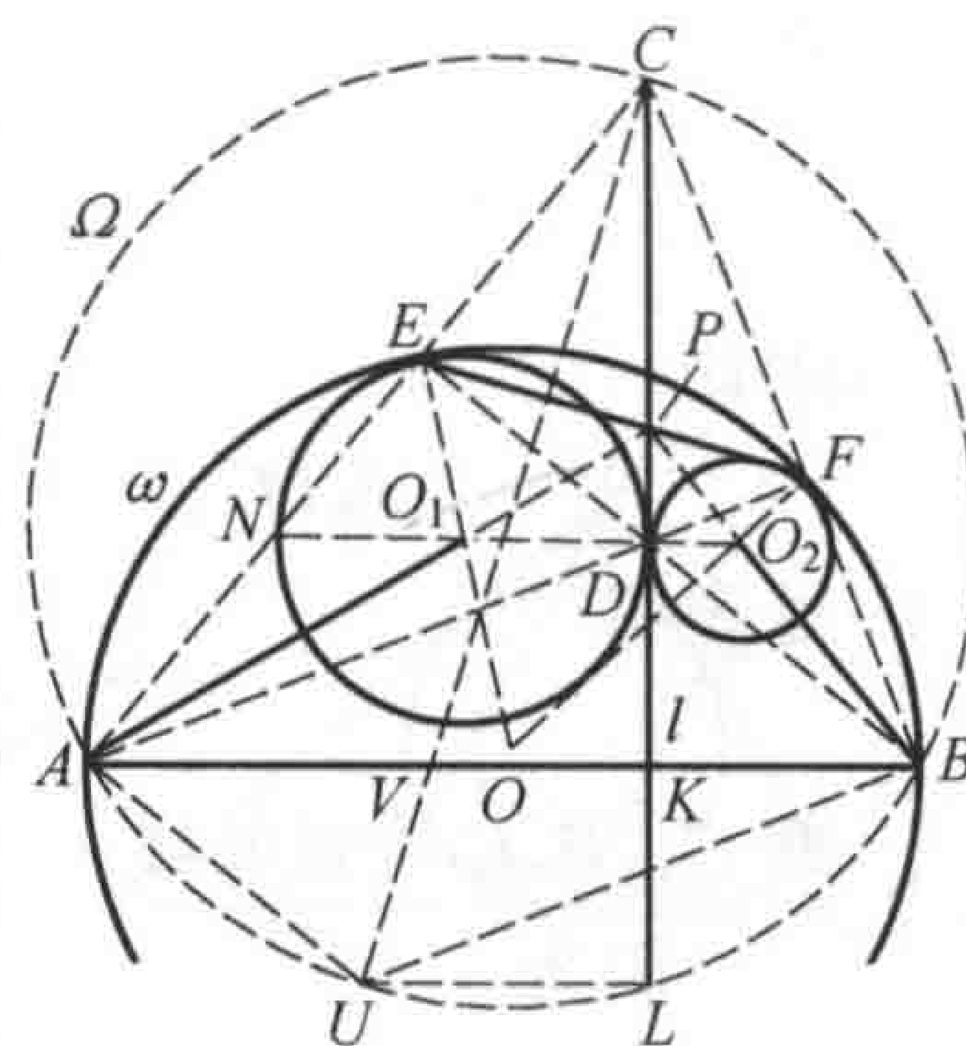


图 47.13

由于 OB,O_1D 分别垂直于 l,则

$$OB\ /\!/\ O_1D$$

所以,E,D,B 三点共线.

同理,F,D,A 三点共线.

设 AE,BF 交于点 C.由于

$$AF\perp BC,BE\perp AC$$

故 D 是 $\triangle ABC$ 的垂心.于是

$$CD\perp AB$$

这表明,点 C 在直线 l 上.

由于点 D 在 $\triangle ABC$ 的内部,则 $\triangle ABC$ 是锐角三角形.

设 $\angle ACB=\gamma$,则

$$\triangle FEC\backsim\triangle ABC$$

相似比

$$\frac{FC}{AC}=\cos\gamma$$

且点 E,F 在以 CD 为直径的圆上.

设 EF 与直线 l 交于点 P.

下面证明:点 P 在直线 AO_1 上.

设 AC 与圆 O_1 的第二个交点为 N,则 ND 是圆 O_1 直径. 由梅涅劳斯定理逆定理,要证 A,O_1,P 三点共线,只要证

$$\frac{CA}{AN}\cdot\frac{NO_1}{O_1D}\cdot\frac{DP}{PC}=1$$

又

$$NO_1=O_1D$$

则只要证

$$\frac{CA}{AN}=\frac{CP}{PD}$$

设直线 l 与 AB 交于点 K,则

$$\frac{CA}{AN}=\frac{CK}{KD}$$

设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Ω,CU 为直径,CU,AB 交于点 V,延长 CK 与 Ω 交于点 L.

因为

$$AB\ /\!/\ UL$$

所以

$$\angle ACU=\angle BCL$$

又

$$\angle EFC=\angle BAC,\angle FEC=\angle ABC,\frac{EF}{AB}=\cos\gamma$$

利用

$$\triangle CEF\backsim\triangle CBA$$

直线 CP 与 CV 关于 $\angle ACB$ 的平分线对称,因此

$$\frac{CP}{PD}=\frac{CV}{VU}$$

由于 D 是 $\triangle ABC$ 的垂心. 故

$$KL=DK$$

于是

$$\frac{CK}{KD}=\frac{CK}{KL}$$

因为

$$AB\ /\!/\ UL$$

所以

$$\frac{CV}{VU}=\frac{CK}{KL}$$

于是

$$\frac{CA}{AN}=\frac{CK}{KD}=\frac{CK}{KL}=\frac{CV}{VU}=\frac{CP}{PD}$$

从而,点 P 在直线 AO_1 上. 同理,点 P 在直线 BO_2 上. 故 AO_1,BO_2,EF 三线共点.

证法2　由证法1知 D 是 $\triangle ABC$ 的垂心. 如图47.14,设 M 是 CD 中点,则 M 是四边形 $CEDF$ 的外接圆的圆心.

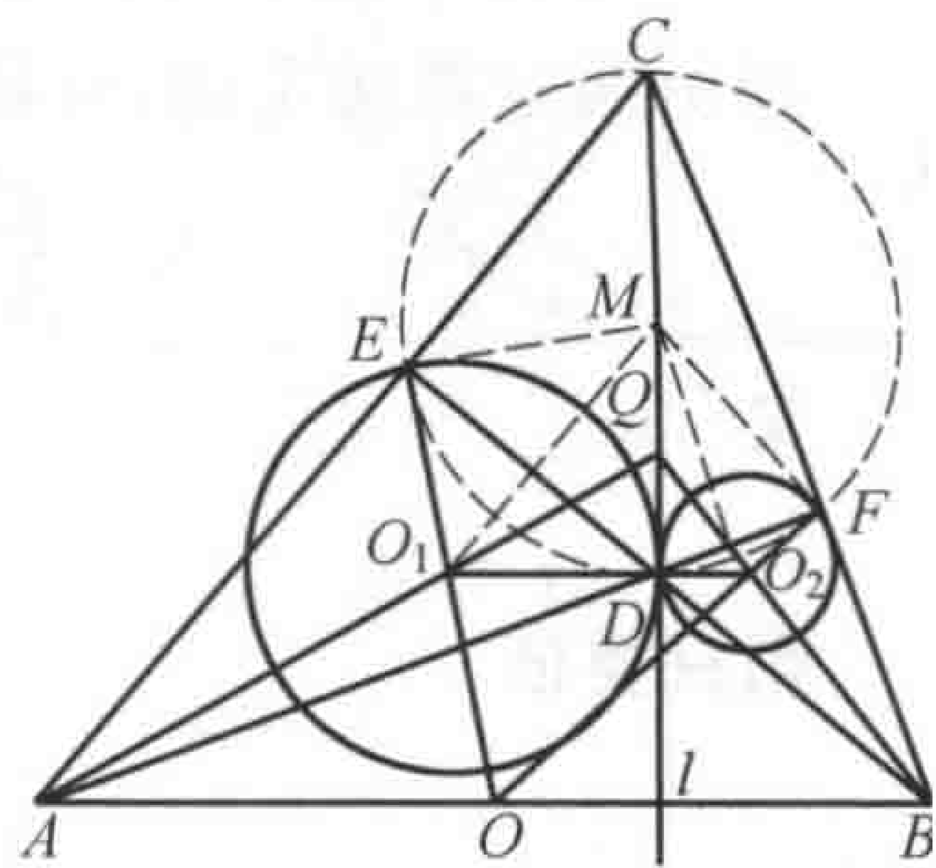


图 47.14

因 O_1O_2 与 AB 均垂直于直线 l,则

$$O_1O_2 \parallel AB$$

又 MO_1 是圆 M 与圆 O_1 的连心线,所以,MO_1,AC 都垂直于 ED. 于是

$$MO_1 \parallel AC$$

同理

$$MO_2 \parallel BC$$

因此,$\triangle ABC$ 与 $\triangle O_1O_2M$ 的对应边平行,且不全等. 于是,对应顶点的连线交于一点 Q,且 Q 为这两个三角形的位似中心.

考虑直线 AOB 和 O_1DO_2.

由于 AD,OO_2 交于点 F,AO_1,BO_2 交于点 Q,OO_1,BD 交于点 E,由帕普斯定理知 F,Q,E 三点共线,即 Q 是 AO_1,BO_2,EF 的公共点.

7 设四边形 $ABCD$ 是凸四边形. 过点 A,D 的圆与过点 B,C 的圆外切于点 P,且 P 在四边形 $ABCD$ 的内部. 若

$$\angle PAB+\angle PDC\leqslant 90^\circ,\angle PBA+\angle PCD\leqslant 90^\circ$$

证明

$$AB+CD\geqslant BC+AD$$

证明　先证明下面的结论:

如图47.15,设 T 是凸四边形 $ABCD$ 内的一点,$\triangle BCT$ 与 $\triangle DAT$ 的外接圆切于点 T 的充分必要条件是

$$\angle ADT+\angle BCT=\angle ATB$$

实际上,若 $\triangle BCT$ 与 $\triangle DAT$ 的外接圆切于点 T,过 T 作这两个圆的公切线与 AB 交于点 Z,于是

$$\angle ADT+\angle BCT=\angle ATZ+\angle BTZ=\angle ATB$$

反之,若

$$\angle ADT+\angle BCT=\angle ATB$$

过点 T 作直线 TZ，与 AB 交于点 Z，且满足

$$\angle ATZ = \angle ADT, \angle BTZ = \angle BCT$$

于是，TZ 与 $\triangle DAT$ 的外接圆相切，也和 $\triangle BCT$ 的外接圆相切. 故这两个圆切于点 T.

如图 47.16，设 $\triangle ABP$ 与 $\triangle CDP$ 的外接圆交于点 P,Q. 由于点 A 在 $\triangle BCP$ 的外接圆的外部，则

$$\angle BCP + \angle BAP < 180^\circ$$

从而，点 C 在 $\triangle ABP$ 的外接圆的外部.

同理，点 D 也在 $\triangle ABP$ 的外接圆的外部.

故点 P,Q 都在 $\triangle CDP$ 的外接圆的 $\overset{\frown}{CD}$ 上.

类似地，点 P,Q 也在 $\triangle ABP$ 的外接圆的 $\overset{\frown}{AB}$ 上.

因此，点 Q 要么在 $\angle BPC$ 内，要么在 $\angle APD$ 内.

不失一般性，不妨假设点 Q 在 $\angle BPC$ 内，于是

$\angle AQD = \angle PQA + \angle PQD = \angle PBA + \angle PCD \leqslant 90^\circ$

因为 $\angle PAB, \angle PDC$ 都是锐角，所以，$\angle PQB, \angle PQC$ 都是钝角. 这表明，点 Q 不仅在 $\angle BPC$ 的内部，而且在 $\triangle BPC$ 的内部.

从而，点 Q 在四边形 $ABCD$ 的内部.

由于

$$\angle BQC = \angle PAB + \angle PDC \leqslant 90^\circ, \angle PCQ = \angle PDQ$$

则

$$\begin{aligned}\angle ADQ + \angle BCQ &= \angle ADP + \angle PDQ + \\ &\angle BCP - \angle PCQ = \\ &\angle ADP + \angle BCP\end{aligned}$$

由前面得到的结论知

$$\angle ADP + \angle BCP = \angle APB$$

且

$$\angle APB = \angle AQB$$

于是

$$\angle ADQ + \angle BCQ = \angle AQB$$

再次应用前面得到的结论，得 $\triangle BCQ$ 与 $\triangle DAQ$ 的外接圆切于点 Q(这里假设 $P \neq Q$. 若 $P = Q$，上面的结论仍然成立).

在四边形 $ABCD$ 的内侧分别作以 BC、DA 为直径的半圆，圆心分别为 M,N. 则 M,N 分别为 BC,DA 的中点.

因为

$$\angle BQC \leqslant 90^\circ, \angle AQD \leqslant 90^\circ$$

所以，这两个半圆分别在 $\triangle BCQ$ 和 $\triangle ADQ$ 的外接圆内部. 由于 $\triangle BCQ$ 和 $\triangle ADQ$ 的外接圆相切，从而，这两个半圆不可能发生重叠. 于是

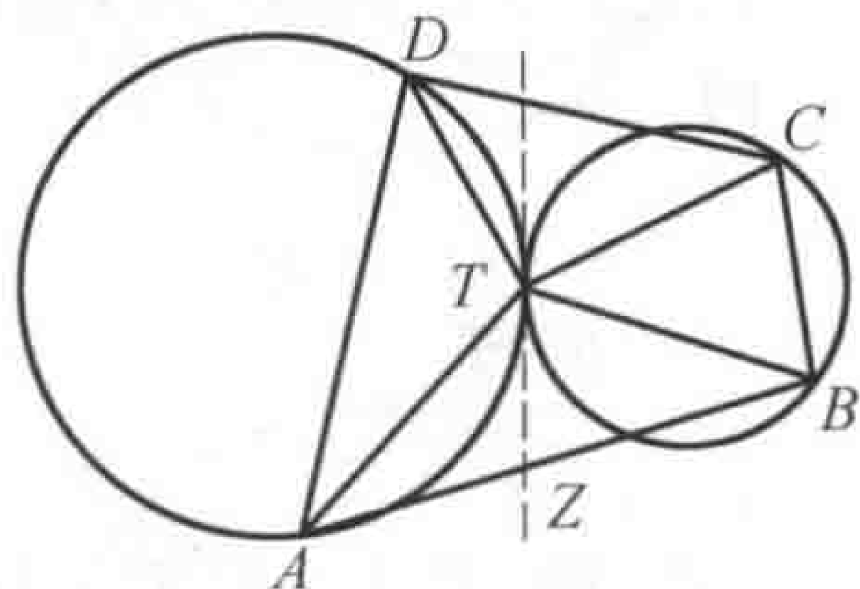


图 47.15

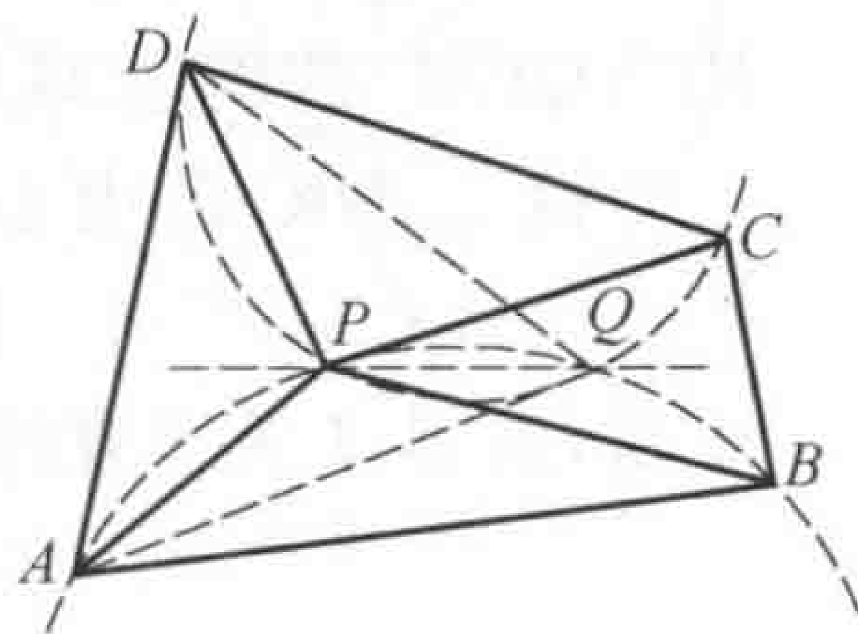


图 47.16

$$MN \geqslant \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}DA$$

又因为

$$MN = \frac{1}{2}(BA + CD)$$

所以

$$MN \leqslant \frac{1}{2}(AB + CD)$$

因此

$$AB + CD \geqslant BC + DA$$

8 设 M_a,M_b,M_c 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 的中点,T_a,T_b,T_c 是 $\triangle ABC$ 外接圆上不包含相对的顶点的 $\overset{\frown}{BC}$,$\overset{\frown}{CA}$,$\overset{\frown}{AB}$ 的中点. 对于 $i \in \{a,b,c\}$,ω_i 是以 M_iT_i 为直径的圆,p_i 是 ω_j 与 ω_k 的外公切线,且 ω_i 与 ω_j,ω_k 在 p_i 的异侧,其中,$\{i,j,k\} = \{a,b,c\}$. 证明:p_a,p_b,p_c 构成的三角形相似于 $\triangle ABC$,并求这两个三角形的相似比.

证明 辅助线如图 47.17,设 T_aT_b 与 ω_b,T_aT_c 与 ω_c 分别交于另外一点 U,V. 过 U,V 且分别与 ω_b,ω_c 相切的直线与 AC,AB 交于点 X,Y.

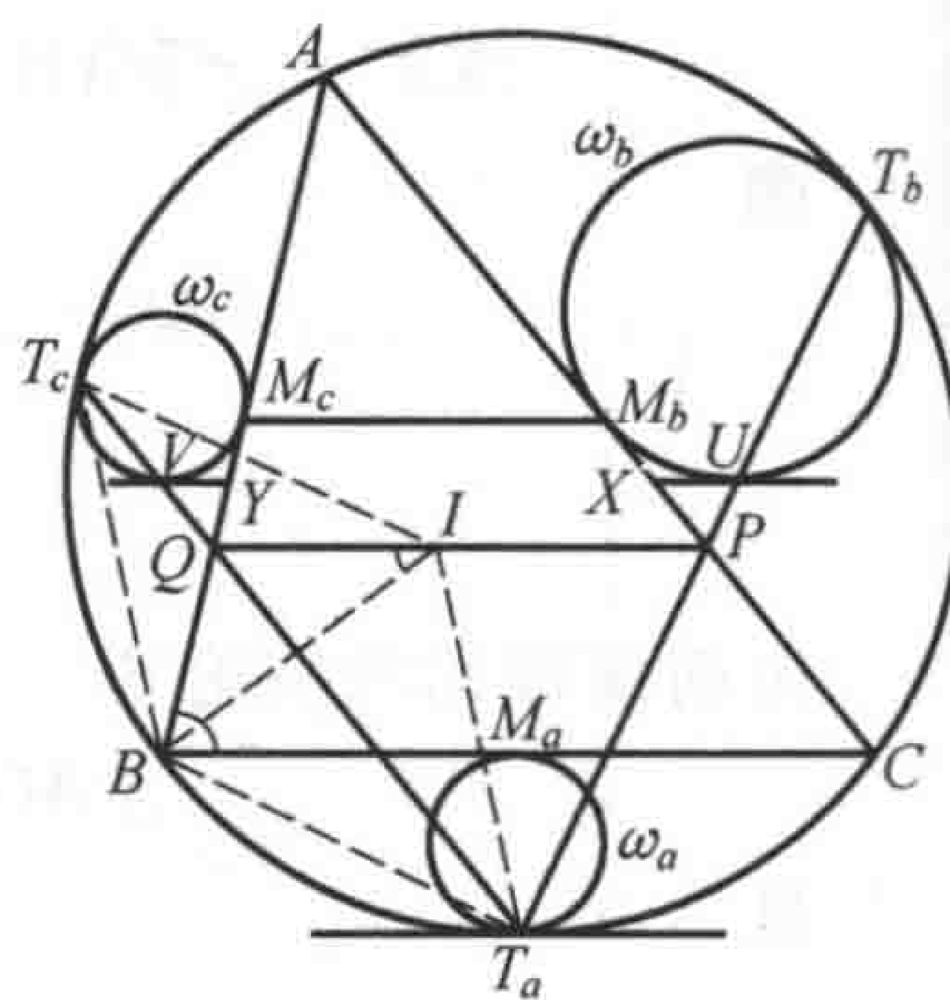


图 47.17

以 T_b 为位似中心,$\frac{T_bT_a}{T_bU}$ 为位似比的位似变换将 UX 变到过 T_a 且与 $\triangle ABC$ 的外接圆相切的直线,由于该切线平行于 BC,所以

$$UX \parallel BC$$

同理

$$VY \parallel BC$$

设 T_aT_b,T_aT_c 与 AC,AB 分别交于点 P,Q, 则 X 是 $\text{Rt}\triangle PUM_b$ 的斜边 PM_b 的中点(因为 $M_bX = XU$),Y 是 $\text{Rt}\triangle QVM_c$ 的斜边 M_cQ 的中点.

设 $\triangle ABC$ 的内心为 I,则

$$T_aI = T_aB, T_cI = T_cB$$

于是,点 B,I 关于直线 T_aT_c 对称

$$\angle QIB = \angle QBI = \angle IBC$$

所以

$$BC \parallel IQ$$

同理

$$BC \parallel IP$$

因此

$$PQ \parallel BC$$

且点 I 在 PQ 上.

因为

$$M_bM_c \parallel BC$$

所以,四边形 PM_bM_cQ 是梯形,且 XY 是中位线. 于是

$$XY \parallel BC$$

结合

$$UX \parallel BC \parallel VY$$

得 U,X,Y,V 四点共线,且是 ω_b,ω_c 的公切线,ω_a 与 ω_b,ω_c 在其异侧. 从而,这条公切线就是 p_a,且

$$p_a \parallel BC$$

同理

$$p_b \parallel AC, p_c \parallel AB$$

故 p_a,p_b,p_c 构成的三角形相似于 $\triangle ABC$,且该三角形与 $\triangle M_aM_bM_c$ 的位似中心为 I,相似比为 $\frac{1}{2}$. 从而,该三角形与 $\triangle ABC$ 的相似比为 $\frac{1}{4}$.

9 已知 A_1,B_1,C_1 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC,CA,AB 上的点,$\triangle AB_1C_1$,$\triangle BC_1A_1$,$\triangle CA_1B_1$ 的外接圆与 $\triangle ABC$ 的外接圆分别交于点 $A_2,B_2,C_2(A_2\neq A,B_2\neq B,C_2\neq C)$,$A_3,B_3,C_3$ 分别是 A_1,B_1,C_1 关于边 BC,CA,AB 的中点的对称点. 证明

$$\triangle A_2B_2C_2 \backsim \triangle A_3B_3C_3$$

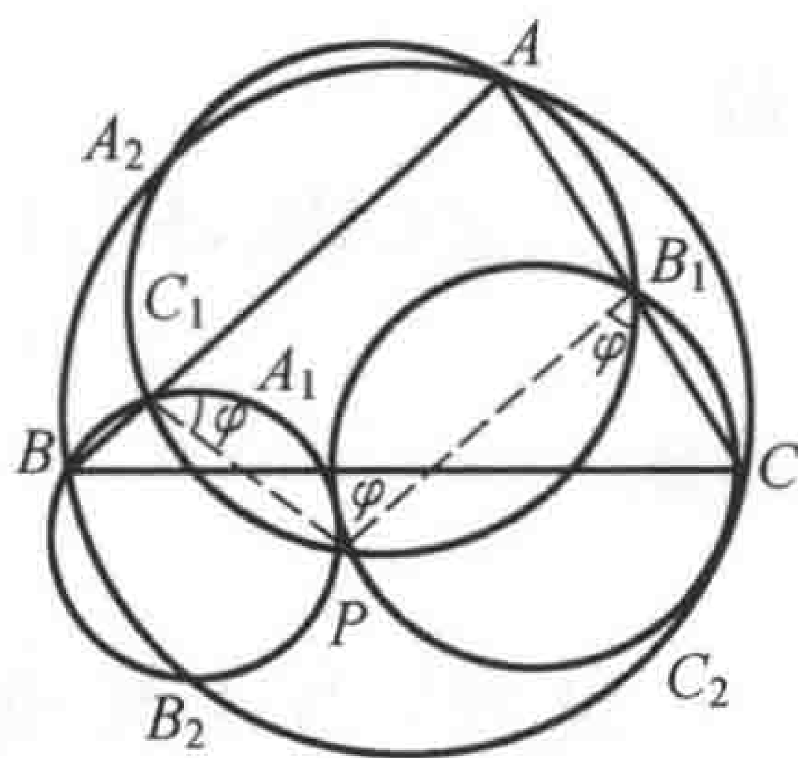


图 47.18

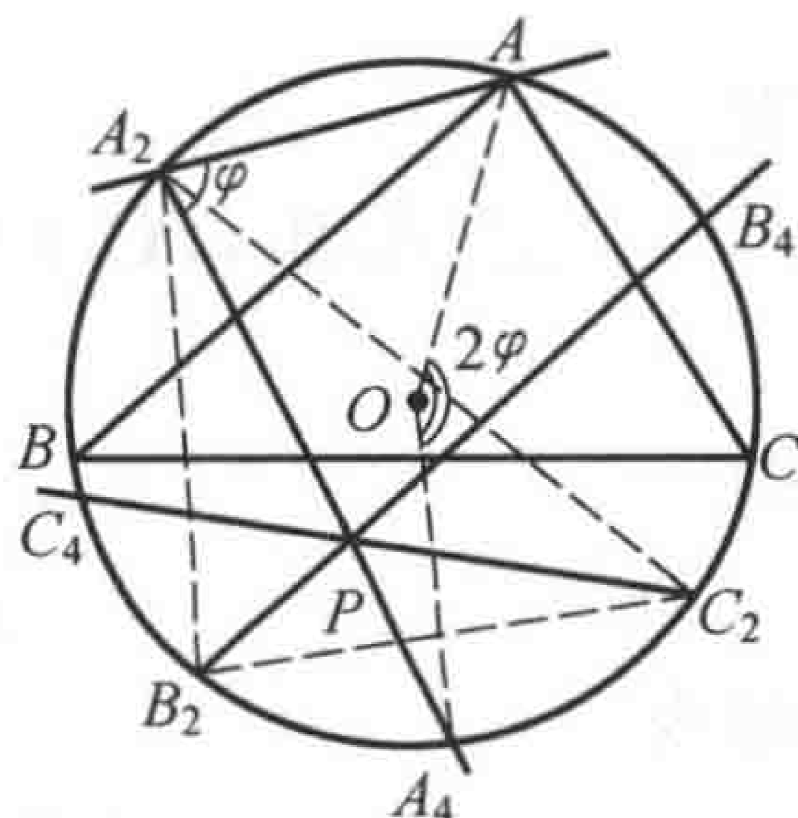


图 47.19

证明 记 $\angle(l,m)$ 表示直线 l 逆时针旋转到与直线 m 平行的直线所夹的角,且再旋转 π 的整数之后,认为倍角的值是不变的,并有性质

$$\angle(l,m)=-\angle(m,l),\angle(l,m)+\angle(m,n)=\angle(l,n)$$

若直线 l 过点 K,L,直线 m 过点 M,N,可用 $\angle(KL,MN)$ 代替 $\angle(l,m)$,且点 K,L 可交换次序,点 M,N 也可交换次序.

于是,若点 K,L,M,N 不共线,K,L,M,N 四点共圆的充分必要条件是

$$\angle(KM,LM)=\angle(KN,LN)$$

下面证明:$\triangle AB_1C_1$,$\triangle BC_1A_1$,$\triangle CA_1B_1$ 的外接圆交于一点.

如图 47.18,设 $\triangle AB_1C_1$ 与 $\triangle BC_1A_1$ 的外接圆交于另外一点 P,于是

$$\angle(PA_1,CA_1)=\angle(PA_1,BA_1)=\angle(PC_1,BC_1)=$$

$$\angle(PC_1,AC_1)=\angle(PB_1,AB_1)=$$
$$\angle(PB_1,CB_1)$$

从而,A_1,B_1,P,C 四点共圆.

记

$$\angle(PA_1,BC)=\angle(PB_1,CA)=\angle(PC_1,AB)=\varphi$$

如图 47.19,设 A_2P,B_2P,C_2P 与 $\triangle ABC$ 的外接圆分别交于点 A_4,B_4,C_4. 于是

$$\angle(A_4A_2,AA_2)=\angle(PA_2,AA_2)=\angle(PC_1,AC_1)=$$
$$\angle(PC_1,AB)=\varphi$$

设 $\triangle ABC$ 的外心为 O,则

$$\angle(OA_4,OA)=2\varphi$$

同理

$$\angle(OB_4,OB)=\angle(OC_4,OC)=2\varphi$$

于是,以 O 为旋转中心、2φ 为旋转角可将 $\triangle A_4B_4C_4$ 变换到 $\triangle ABC$(图 47.20).

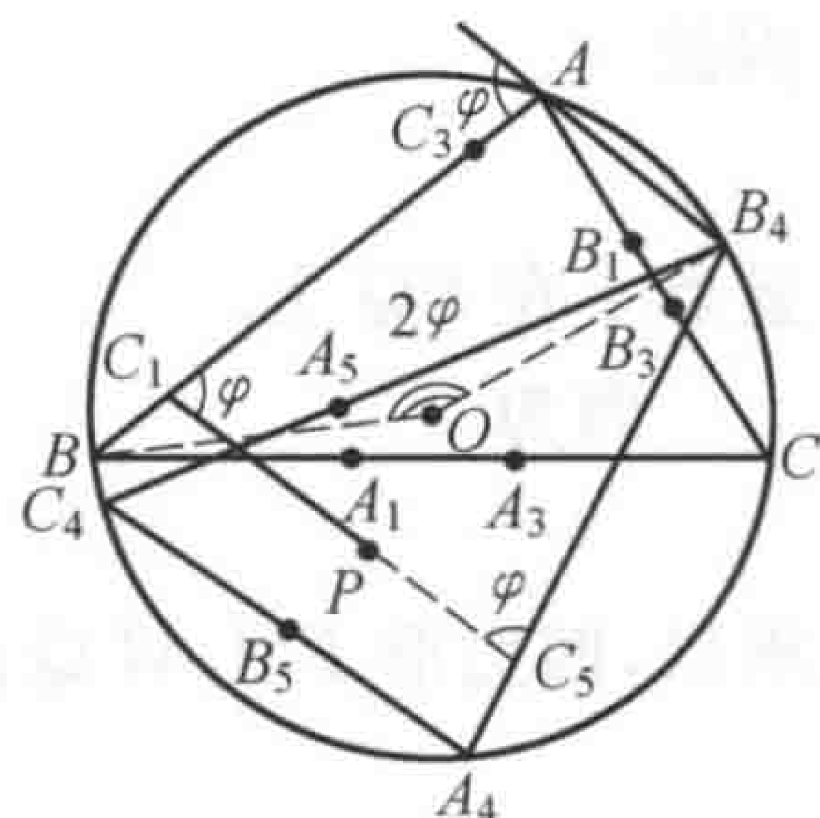


图 47.20

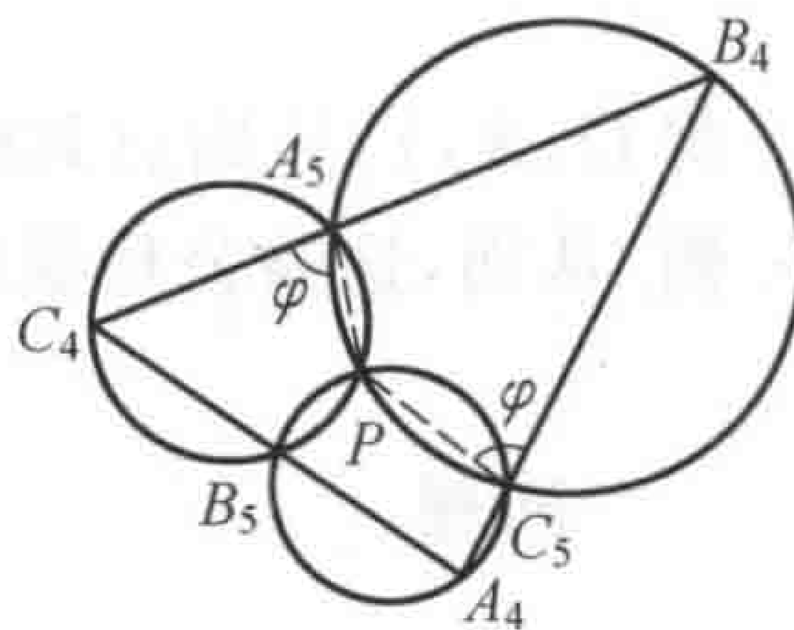


图 47.21

则

$$\angle(A_4B_4,AB)=\angle(B_4C_4,BC)=$$
$$\angle(C_4A_4,CA)=2\varphi$$
$$\angle(AB_4,AB)=\varphi$$

故

$$\angle(AB_4,PC_1)=\angle(AB_4,AB)+\angle(AB,PC_1)=$$
$$\varphi+(-\varphi)=0$$

因此

$$AB_4 \mathbin{/\!/} PC_1$$

设 PC_1 与 A_4B_4 交于点 C_5,类似地定义 A_5,B_5.

由

$$AB_4 \mathbin{/\!/} C_1C_5$$

有

$$\angle(A_4B_4,PC_1)=\angle(A_4B_4,AB)+\angle(AB,PC_1)=$$
$$2\varphi+(-\varphi)=\varphi$$

即

$$\angle(B_4C_5,C_5C_1)=\varphi$$

结合

$$\angle(C_5C_1,C_1A)=\angle(PC_1,AB)=\varphi$$

知四边形 $AB_4C_5C_1$ 是等腰梯形.

于是

$$AC_1=B_4C_5$$

同理,将点 A 换成点 B,可得

$$BC_1=A_4C_5$$

因为

$$AC_1+BC_1=AB=A_4B_4$$

所以,点 C_5 在线段 A_4B_4 上,且有

$$A_4C_5=BC_1=AC_3, B_4C_5=AC_1=BC_3$$

于是,将 $\triangle A_4B_4C_4$ 变到 $\triangle ABC$ 的旋转变换,将点 C_5 变到点 C_3.

类似地,该变换将点 B_5 变到 B_3,将点 A_5 变到 A_3.

因此

$$\triangle A_3B_3C_3 \cong \triangle A_5B_5C_5.$$

下面只要证明

$$\triangle A_5B_5C_5 \backsim \triangle A_2B_2C_2.$$

由于

$$\angle(B_4C_5, PC_5)=\angle(A_4B_4, PC_1)=\varphi$$
$$\angle(B_4A_5, PA_5)=\angle(B_4C_4, PA_1)=\varphi$$

因此,P, B_4, C_5, A_5 四点共圆.

同理,P, C_4, A_5, B_5 及 P, A_4, B_5, C_5 分别四点共圆(图 47.21).

故

$$\angle(A_5B_5, C_5B_5)=\angle(A_5B_5, PB_5)+\angle(PB_5, C_5B_5)= \angle(A_5C_4, PC_4)+\angle(PA_4, C_5A_4)$$

又点 $A_2, B_2, C_2, A_4, B_4, C_4$ 均在 $\triangle ABC$ 的外接圆上(图 47.18),所以

$$\angle(A_2B_2, C_2B_2)=\angle(A_2B_2, C_4B_2)+\angle(B_4B_2, C_2B_2)= \angle(A_2A_4, B_4A_4)+\angle(B_4C_4, C_2C_4)$$

由于 $A_2A_4, B_4A_4, B_4C_4, C_2C_4$ 分别与 $PA_4, C_5A_4, A_5C_4, PC_4$ 在同一条直线上,因此

$$\angle(A_5B_5, C_5B_5)=\angle(A_2B_2, C_2B_2)$$

同理

$$\angle(B_5C_5, A_5C_5)=\angle(B_2C_2, A_2C_2)$$
$$\angle(C_5A_5, B_5A_5)=\angle(C_2A_2, B_2A_2)$$

故

$$\triangle A_5B_5C_5 \backsim \triangle A_2B_2C_2$$

10 对于凸多边形 P 的任意边 b,以 b 为边,在 P 内部作一个面积最大的三角形.证明:对 P 的每条边,按上述方法所得三角形的面积之和至少是 P 的面积的 2 倍.

证明 此题答案与本届 IMO 试题的第 6 题答案相同.

数论部分

1 求所有的整数对(x,y)，使得

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2$$

解 此题答案与本届 IMO 试题的第 4 题答案相同.

2 已知 $x\in(0,1)$，令 $y\in(0,1)$，且 y 的小数点后第 n 位数字是 x 的小数点后第 2^n 位数字. 证明：若 x 是有理数，则 y 也是有理数.

解 因为 x 是有理数，所以，x 从小数点后某位开始具有周期性. 设周期长度为 d，且设

$$d=2^w v$$

其中，v 是奇数，则存在正整数 w，使得

$$2^w\equiv 1(\bmod v)$$

特别地，可以取

$$w=\phi(v)$$

其中，ϕ 是欧拉函数. 于是，对于每个正整数 n，有

$$2^{n+w}=2^n\cdot 2^w\equiv 2^n(\bmod v)$$

又因为对于所有 $n\geqslant u$，有

$$2^{n+w}\equiv 2^n\equiv 0(\bmod 2^u)$$

所以，对于所有 $n\geqslant u$，有

$$2^{n+w}\equiv 2^n(\bmod d)$$

因此，当 n 足够大时，x 的小数点后第 2^{n+w} 位数字与第 2^n 位数字相同. 故 y 的小数点后第 $n+w$ 位数字与第 n 位数字相同. 所以，y 小数点后的数字从某位开始以 w 为周期. 从而，y 是有理数.

3 已知数列 $f(1),f(2),\cdots$ 被定义为

$$f(n)=\frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n}\right]\right)$$

其中，$[x]$ 表示不大于 x 的最大整数. 证明：

(1) 有无穷多个 n，使得

$$f(n+1)>f(n)$$

(2) 有无穷多个 n，使得

$$f(n+1)<f(n)$$

证明 设

$$g(n)=nf(n),n\geqslant 1$$

则

$$g(0)=0$$

对于 $k=1,2,\cdots,n$,若 k 不是 n 的因数,则

$$\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]=0$$

若 k 是 n 的因数,则

$$\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]=1$$

对于 $n\geqslant 1$,设 $d(n)$ 是 n 的正因数的个数,则

$$g(n)=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n-1}\right]+\left[\frac{n}{n}\right]=$$
$$\left[\frac{n-1}{1}\right]+\left[\frac{n-1}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right]+$$
$$\left[\frac{n-1}{n}\right]+d(n)=g(n-1)+d(n)$$

故

$$g(n)=g(n-1)+d(n)=$$
$$g(n-2)+d(n-1)+d(n)=\cdots=$$
$$d(1)+d(2)+\cdots+d(n)$$

从而

$$f(n)=\frac{d(1)+d(2)+\cdots+d(n)}{n}$$

因此,只要证均有无穷多个 n,使得

$$d(n+1)>f(n),d(n+1)<f(n)$$

当 $n=1$ 时

$$d(n)=1$$

当 $n\geqslant 2$ 时

$$d(n)\geqslant 2$$

等号当且仅当 n 是质数时成立. 因为

$$f(6)=\frac{7}{3}>2$$

所以,由数学归纳法易知,对于所有的 $n\geqslant 6$,有

$$f(n)>2$$

又因为有无穷多个 $n(n\geqslant 6)$,使得 $n+1$ 是质数,从而

$$d(n+1)=2<f(n)$$

这就证明了情形(2).

因为对于所有的正整数 k,有

$$d(2^k)=k+1$$

所以,$d(1),d(2),\cdots$ 无界. 于是,存在无穷多个 n,使得

$$d(n+1)>\max\{d(1),d(2),\cdots,d(n)\}$$

从而

$$d(n+1) > f(n)$$

这就证明了情形(1).

4 设 $P(x)$ 为 $n(n>1)$ 次整系数多项式,k 是一个正整数.考虑多项式

$$Q(x)=P(P(\cdots P(P(x))\cdots))$$

其中 P 出现 k 次.证明:最多存在 n 个整数 t,使得 $Q(t)=t$.

证明 此题答案与本届 IMO 试题的第 5 题答案相同.

5 求方程 $\frac{x^7-1}{x-1}=y^5-1$ 的所有整数解.

解 没有整数解.

引理 若 x 是整数,p 是 $\frac{x^7-1}{x-1}$ 的质因数,则要么

$$p\equiv 1(\bmod 7)$$

要么

$$p=7$$

引理的证明 由于

$$p\left|\frac{x^7-1}{x-1}\right.$$

因此

$$p\mid(x^7-1)$$

于是

$$(x,p)=1$$

由费马小定理有

$$x^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$$

假设

$$7\nmid(p-1)$$

则

$$(p-1,7)=1$$

由裴蜀定理,存在整数 k,m,使得

$$7k+(p-1)m=1$$

故

$$x\equiv x^{7k+(p-1)m}\equiv(x^7)^k(x^{p-1})^m\equiv 1(\bmod p)$$

所以

$$\frac{x^7-1}{x-1}=x^6+x^5+\cdots+1\equiv 7(\bmod p)$$

因此，$p \mid 7$. 从而，$p=7$.

回到原题.

由引理可知，$\frac{x^7-1}{x-1}$ 的每一个正因数为 d，那么

$$d\equiv 0(\bmod 7)$$

要么

$$d\equiv 1(\bmod 7)$$

假设 x,y 是方程的一组整数解. 因为对于所有 $x\neq 1$，有

$$\frac{x^7-1}{x-1}>0$$

所以

$$y-1>0$$

又

$$(y-1)\left|\frac{x^7-1}{x-1}=y^5-1\right.$$

于是

$$y\equiv 1(\bmod 7) \text{ 或 } y\equiv 2(\bmod 7)$$

若

$$y\equiv 1(\bmod 7)$$

则

$$y^4+y^3+y^2+y+1\equiv 5(\bmod 7)$$

若

$$y\equiv 2(\bmod 7)$$

则

$$y^4+y^3+y^2+y+1\equiv 3(\bmod 7)$$

由于 $y^4+y^3+y^2+y+1$ 也是 $\frac{x^7-1}{x-1}$ 的因数，但其模 7 的余数不是 0 或 1，矛盾.

因此，方程没有整数解.

6 设 $a,b(a>b>1)$ 是两个互质的正整数. 定义 c 的"重量"$\omega(c)$，对于所有满足 $ax+by=c$ 的整数对 (x,y)，$\omega(c)$ 是 $|x|+|y|$ 的最小值. 若

$$\omega(c)\geqslant\omega(c\pm a),\omega(c)\geqslant\omega(c\pm b)$$

则称 c 是"本地冠军". 求所有本地冠军及其数目.

解 若 $ax+by=c$，$|x|+|y|$ 是最小的，即

$$|x|+|y|=\omega(c)$$

则称 x,y 是 c 的一个"代表".

引理 1 若 x,y 是本地冠军 c 的一个代表,则 $xy<0$.

引理 1 的证明 若 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$,考虑 $\omega(c)$ 和 $\omega(c+a)$ 的值.

一方面,由于 c 和 $c+a$ 的代表具有 $au+bv$ 的形式,于是,对于任意整数 k,有

$$c=a(x-kb)+b(y+ka)$$

$$c+a=a(x+1-kb)+b(y+ka)$$

因此

$$x+y=|x|+|y|\leqslant|x-kb|+|y+ka|$$

另一方面,由于

$$\omega(c+a)\leqslant\omega(c)$$

因此,存在一个整数 k,使得

$$|x+1-kb|+|y+ka|\leqslant|x|+|y|=x+y$$

则

$$(x+1-kb)+(y+ka)\leqslant|x+1-kb|+|y+ka|\leqslant x+y\leqslant|x-kb|+|y+ka|$$

由

$$(x+1-kb)+(y+ka)\leqslant x+y$$

得

$$k(a-b)+1\leqslant 0$$

于是,$k<0$.

由

$$|x+1-kb|+|y+ka|\leqslant|x-kb|+|y+ka|$$

得

$$|x+1-kb|\leqslant|x-kb|$$

于是,$kb>x$,矛盾.

若 $x,y\leqslant 0$,对于 $-c,-x,-y$ 进行同样的讨论,仍可得到矛盾.

引理 1 得证.

由引理 1,将

$$c=ax+by$$

改写为

$$c=ax-by$$

其中,x,y 是非零的,且 x,y 同号.

引理 2 设 $c=ax-by$,其中,x,y 同号,且满足 $|x|+|y|$ 是最小的,则 c 是本地冠军当且仅当

$$|x|<b,\ |x|+|y|=\left[\frac{a+b}{2}\right]$$

引理 2 的证明 不失一般性,假设 $x,y>0$,则

$$c-a=a(x-1)-by,\ c+b=ax-b(y-1)$$

于是

$$\omega(c-a)\leqslant(x-1)+y<\omega(c)$$
$$\omega(c+b)\leqslant x+(y-1)<\omega(c)$$

若 c 是本地冠军,因为

$$\omega(c+a)\leqslant\omega(c)$$

所以,存在整数 k,使得

$$c+a=a(x+1-kb)-b(y-ka)$$

且

$$|x+1-kb|+|y-ka|\leqslant x+y$$

显然,当 $k\leqslant 0$ 时,上面的不等式不成立.因此,$k>0$.

设

$$f(t)=|x+1-bt|+|y-at|-(x+y)$$

则

$$f(0)=1,\ f(k)\leqslant 0$$

且 $f(t)$ 是凸函数.

由琴生不等式有

$$f(1)=f\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot 0+\frac{1}{k}\cdot k\right)\leqslant$$
$$\left(1-\frac{1}{k}\right)f(0)+\frac{1}{k}f(k)<1$$

又因为 $f(1)$ 是一个整数,所以,$f(1)\leqslant 0$,即

$$|x+1-b|+|y-a|\leqslant x+y$$

考虑到

$$c=a(x-b)-b(y-a)$$

则

$$x+y\leqslant|x-b|+|y-a|$$

比较上面两个不等式得

$$|x+1-b|\leqslant|x-b|$$

从而,$x<b$.

同理,考虑 $\omega(c-b)$,可得 $y<a$.

由于

$$|x-b|=b-x$$
$$|x+1-b|=b-x-1$$
$$|y-a|=a-y$$

则

$$(b-x-1)+(a-y)\leqslant x+y\leqslant(b-x)+(a-y)$$

即

$$\frac{a+b-1}{2} \leqslant x+y \leqslant \frac{a+b}{2}$$

从而

$$x+y=\left[\frac{a+b}{2}\right]$$

反之,假设

$$0<x<b$$

$$x+y=\left[\frac{a+b}{2}\right]$$

因为 $a>b$,所以

$$0<y<a$$

于是

$$\begin{aligned}\omega(c+a) \leqslant & \mid x+1-b\mid+\mid y-a\mid= \\ & a+b-1-(x+y) \leqslant \\ & x+y=\omega(c)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega(c-b) \leqslant & \mid x-b\mid+\mid y+1-a\mid= \\ & a+b-1-(x+y) \leqslant \\ & x+y=\omega(c)\end{aligned}$$

结合开始时得到的

$$\omega(c-a)<\omega(c), \omega(c+b)<\omega(c)$$

知 c 是本地冠军.

引理 3 设 $c=ax-by$, x, y 同号, $|x|<b$, $|y|<a$, $|x|+|y|=\left[\frac{a+b}{2}\right]$. 则

$$\omega(c)=|x|+|y|$$

引理 3 的证明 不妨设 $x, y>0$. 由定义知

$$\omega(c)=\min \{|x-kb|+|y-ka| \mid k \in \mathbf{Z}\}$$

若 $k \leqslant 0$,则显然有

$$|x-kb|+|y-ka| \geqslant x+y$$

若 $k \geqslant 1$,则

$$\begin{aligned}|x-kb|+|y-ka|= & (kb-x)+(ka-y)= \\ & k(a+b)-(x+y) \geqslant \\ & (2k-1)(x+y) \geqslant x+y\end{aligned}$$

因此

$$\omega(c)=x+y$$

同理可证 $x, y<0$ 时的情形.

回到原题.

由引理 1,2,3 可得本地冠军的集合为

$$C=\left\{\pm(ax-by)\mid 0<x<b, x+y=\left[\frac{a+b}{2}\right]\right\}$$

设 C^+，C^- 分别表示形如 $+(ax-by)$，$-(ax-by)$ 的集合，则这两个集合都是项数 $b-1$、公差为 $a+b$ 的等差数列.

当 a，b 都是奇数时，有

$$C^+=C^-$$

这是因为

$$a(-x)-b(-y)=a(b-x)-b(a-y)$$

$$x+y=\frac{a+b}{2}$$

所以

$$(b-x)+(a-y)=\frac{a+b}{2}$$

因此，有 $b-1$ 个本地冠军.

当 a，b 的奇偶性不同时，对于任意 $c_1\in C^+$，$c_2\in C^-$，有

$$2c_1\equiv -2c_2\equiv 2\left(a\cdot\frac{a+b-1}{2}+b\cdot 0\right)\equiv$$

$$-a(\bmod (a+b))$$

$$2c_1-2c_2\equiv -2a(\bmod (a+b))$$

由于 $a+b$ 是奇数，且

$$(a+b,a)=1$$

因此，C^+ 和 C^- 中元素模 $a+b$ 属于两个不同的剩余类. 于是，C 是两个不交的等差数列的并集，因此，本地冠军的数目有 $2(b-1)$ 个.

综上所述，当 a，b 是奇数时，有 $b-1$ 个本地冠军，其他情形有 $2(b-1)$ 个本地冠军.

7 证明：对于每一个正整数 d，存在一个整数 m，使得 $d\mid(2^m+m)$.

证明 对 d 用数学归纳法证明：对于每一个正整数 N，存在正整数 b_0，b_1，$\cdots$，b_{d-1}，使得对于每一个 $i(i=0,1,\cdots,d-1)$，有 $b_i>N$，且有

$$2^{b_i}+b_i\equiv i(\bmod d)$$

$m=b_0$ 即为原命题.

当 $d=1$ 时，结论显然成立.

对于 $a>1$，假设 $d<a$ 时，结论成立.

由于 2^i 模 a 的剩余从某个指数 M 开始具有周期性，设 k 为其最小正周期，当 k_0 为 k 的倍数时，有

$$2^{M+k_0}\equiv 2^M(\bmod a)$$

因为 0 要么不在一个周期中,要么是这个周期中的唯一的数,所以,一个周期不包含模 a 的所有余数. 因此,$k < a$.

设

$$d=(a,k),a'=\frac{a}{d},k'=\frac{k}{d}$$

因为

$$0<k<a$$

所以

$$0<d<a$$

由归纳假设,存在正整数 $b_0,b_1,\cdots,b_{d-1}$,使得

$$b_i>\max\{2^M,N\}$$

且对于 $i(i=0,1,\cdots,d-1)$ 有

$$2^{b_i}+b_i\equiv i(\bmod d) \quad ①$$

对于每一个 $i(i=0,1,\cdots,d-1)$,考虑数列

$$2^{b_i}+b_i,2^{b_i+k}+(b_i+k),\cdots,2^{b_i+(a'-1)k}+[b_i+(a'-1)k] \quad ②$$

它们模 a 的余数分别与

$$2^{b_i}+b_i,2^{b_i}+(b_i+k),\cdots,2^{b_i}+[b_i+(a'-1)k]$$

同余,d 个数列共有 $a'd=a$ 项.

下面证明:它们模 a 的余数两两不同.

假设对于

$$i,j\in\{0,1,\cdots,d-1\}$$

和

$$m,n\in\{0,1,\cdots,a'-1\}$$

有

$$2^{b_i}+(b_i+mk)\equiv 2^{b_j}+(b_j+nk)(\bmod a) \quad ③$$

因为 d 是 a 的因数,所以

$$2^{b_i}+(b_i+mk)\equiv 2^{b_j}+(b_j+nk)(\bmod d)$$

又 d 是 k 的因数,再结合式 ① 得

$$i=j(\bmod d)$$

由于

$$i,j\in\{0,1,\cdots,d-1\}$$

因此

$$i=j$$

将其代入式 ③ 得

$$mk\equiv nk(\bmod a)$$

于是

$$mk'\equiv nk'(\bmod a')$$

因为 a' 与 k' 互质,所以

$$m\equiv n(\bmod a')$$

于是

$$m = n$$

由式 ② 确定的 d 个数列共 a 个数，这正是我们需要的，且由于每个

$$b_i > \max\{2^M, N\}$$

因此，2 的所有指数都大于 N.

从而，对于 a 结论也成立.

第三编

第48届国际数学奥林匹克

第 48 届国际数学奥林匹克题解

越南，2007

新西兰命题

1 给定实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，对每个 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$，定义

$$d_i = \max\{a_j \mid 1 \leqslant j \leqslant i\} - \min\{a_j \mid i \leqslant j \leqslant n\}$$

且令

$$d = \max\{d_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

(a) 对于任意实数 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$，有

$$\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \geqslant \frac{d}{2} \qquad (*)$$

(b) 证明：存在实数 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ 使得式 $(*)$ 中的等号成立.

解 (a) 设

$$d = d_g, 1 \leqslant g \leqslant n$$

并记

$$a_p = \max\{a_j \mid 1 \leqslant j \leqslant g\}$$
$$a_r = \min\{a_j \mid g \leqslant j \leqslant n\}$$

则

$$1 \leqslant p \leqslant g \leqslant r \leqslant n$$

且

$$d = a_p - a_r$$

对任意实数

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$$

注意到

$$(a_p - x_p) + (x_r - a_r) = (a_p - a_r) + (x_r - x_p) \geqslant a_p - a_r = d$$

所以

$$a_p - x_p \geqslant \frac{d}{2}$$

或

$$x_r - a_r \geqslant \frac{d}{2}$$

故有

$$\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \geqslant \max\{|x_p - a_p|\}$$

$$|x_r - a_r|\} \geqslant \max\{a_p - x_p, x_r - a_r\} \geqslant \frac{d}{2}$$

(b) 定义序列 $\{x_k\}$ 如下

$$x_1 = a_1 - \frac{d}{2}, x_k = \max\left\{x_{k-1}, a_k - \frac{d}{2}\right\}, 2 \leqslant k \leqslant n$$

下证明对这个序列(*)取等号.

由 $\{x_k\}$ 的定义知, $\{x_k\}$ 是不减的,且

$$x_k - a_k \geqslant -\frac{d}{2}$$

对所有 $1 \leqslant k \leqslant n$ 成立.

下面我们证明

$$x_k - a_k \leqslant \frac{d}{2} \quad ①$$

对所有 $1 \leqslant k \leqslant n$ 成立.

对任意 $1 \leqslant k \leqslant n$,设 $l \leqslant k$ 是使得 $x_k = x_l$ 的最小下标,则要么 $l = 1$,要么 $l \geqslant 2$ 且 $x_l > x_{l-1}$,在这两种情况都有

$$x_k = x_l = a_l - \frac{d}{2} \quad ②$$

因为

$$a_l - a_k \leqslant \max\{a_j \mid 1 \leqslant j \leqslant k\} -$$

$$\min\{a_j \mid k \leqslant j \leqslant n\} = d_k \leqslant d$$

这时由式 ② 可得

$$x_k - a_k = a_l - a_k - \frac{d}{2} \leqslant d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$$

这就是式 ①. 这样就得到

$$-\frac{d}{2} \leqslant x_k - a_k \leqslant \frac{d}{2}$$

对所有 $1 \leqslant k \leqslant n$ 成立,故

$$\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \leqslant \frac{d}{2}$$

再由情形(a)知, $\{x_k\}$ 使得式(*)取等号.

(b) 的另解:

对每一个 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$,令

$$M_i = \max\{a_j \mid 1 \leqslant j \leqslant i\}, m_i = \min\{a_j \mid i \leqslant j \leqslant n\}$$

则

$$M_i = \max\{a_1, \cdots, a_i\} \leqslant \max\{a_1, \cdots, a_i, a_{i+1}\} = M_{i+1}$$

$$m_i = \min\{a_i, a_{i+1}, \cdots, a_n\} \leqslant \min\{a_{i+1}, \cdots, a_n\} = m_{i+1}$$

这说明序列 $\{M_i\}$ 和 $\{m_i\}$ 都是不减的,且由它的定义知

$$m_i \leqslant a_i \leqslant M_i$$

现令

$$x_i = \frac{M_i + m_i}{2}$$

由

$$d_i = M_i - m_i$$

可得

$$-\frac{d}{2} = \frac{m_i - M_i}{2} = x_i - M_i \leqslant x_i - a_i \leqslant$$

$$x_i - m_i = \frac{M_i - m_i}{2} = \frac{d_i}{2}$$

因此

$$\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \leqslant \max\left\{\frac{d_i}{2} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\right\} = \frac{d}{2}$$

再由情形(a)的结论知，$\{x_k\}$ 使得式（$*$）中的等号成立.

2 设 A,B,C,D,E 五点中，$ABCD$ 是一个平行四边形，$BCDE$ 是一个圆内接四边形. 设 l 是通过 A 的一条直线，l 与线段 DC 交于点 F（F 是线段 DC 的内点），且与直线 BC 交于点 G. 若 $EF = EG = EC$，求证：l 是 $\angle DAB$ 的角平分线.

卢森堡命题

解 如图 48.1，作等腰 $\triangle ECF$ 和等腰 $\triangle EGC$ 的高 EK 和 EL.

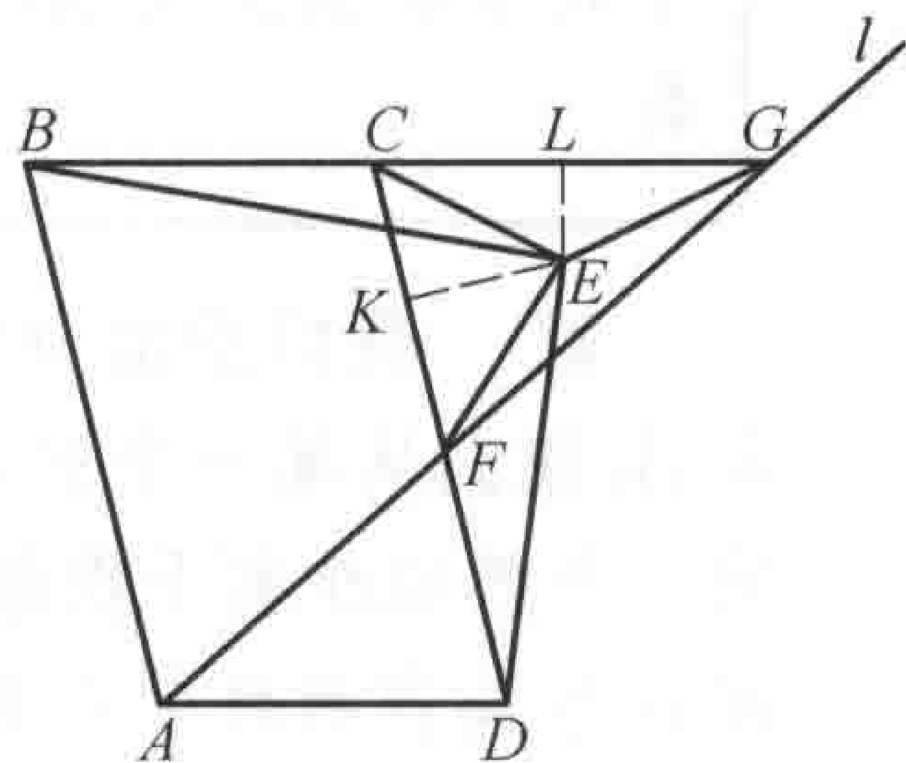


图 48.1

由条件易知

$$\triangle ADF \backsim \triangle GCF$$

因此

$$\frac{AD}{GC} = \frac{DF}{CF} \Rightarrow \frac{BC}{CG} = \frac{DF}{CF} \Rightarrow$$

$$\frac{BC}{CL} = \frac{DF}{CK} \Rightarrow \frac{BC + CL}{CL} =$$

$$\frac{DF + FK}{CK} \Rightarrow \frac{BL}{CL} = \frac{DK}{CK} \Rightarrow$$

$$\frac{BL}{DK} = \frac{CL}{CK} \quad ①$$

又由

$$\angle LBK = \angle EDK$$

知

$$\text{Rt}\triangle BLE \backsim \text{Rt}\triangle DKE$$

所以

$$\frac{BL}{DK} = \frac{EL}{EK} \quad ②$$

由式 ①，② 知

$$\frac{CL}{CK}=\frac{EL}{EK}$$

这意味着

$$\triangle CLE \backsim \triangle CKE$$

所以

$$\frac{CL}{CK}=\frac{CE}{CE}=1$$

因此

$$CL=CK \Rightarrow CG=CF$$

故

$$\angle BAG=\angle GAD$$

结论得证.

3 在一次数学竞赛活动中,有一些参赛选手是朋友.朋友关系是相互的.如果一群参赛选手的任何两人都是朋友,我们就称这群选手为一个"团"(特别地,人数少于 2 的一群也是一个团).

已知在这次竞赛中,最大的团(人数最多的团)的人数是个偶数,证明:我们总能把参赛选手分配到两个教室,使得一个教室中的最大团的人数等于另一个教室中的最大团的人数.

俄罗斯命题

解 我们给出分配选手的一种算法.记这两间教室分别为 A 和 B.我们从某一个初始排列开始,靠每次调整一人从一个教室到另一个教室作若干次修改来达到目标.在这种算法的任何一步,A 和 B 分别表示教室 A 和 B 中选手的集合,$C(A)$ 和 $C(B)$ 分别表示教室 A 和教室 B 中最大团的人数.

第一步:设 M 是所有参赛选手中的最大团

$$|M|=2m$$

将 M 中的所有成员分配到教室 A 中,然后把另外的所有成员分配到教室 B 中.

因为 M 是所有参赛选手中的最大团,我们有

$$C(A)=|M|\geqslant C(B)$$

第二步:只要 $C(A)>C(B)$,我们就从教室 A 中派一人到教室 B 中.

注意到

$$C(A)>C(B)$$

这说明 A 非空.

在操作每一步,$C(A)$ 减少 1 而 $C(B)$ 至多增加 1,这样在这种

操作结束时，一定有

$$C(A) \leqslant C(B) \leqslant C(A) + 1$$

在这种操作结束时，也一定有

$$C(A) = |A| \geqslant m$$

否则 M 中的至少 $m+1$ 个选手在教室 B 中，M 中的至多 $m-1$ 个选手在教室 A 中，因此

$$C(B) - C(A) \geqslant (m+1) - (m-1) = 2$$

不可能.

第三步：设 $K = C(A)$，如果 $C(B) = K$，则结论已成立. 否则我们有

$$C(B) = K + 1$$

从上面估计知

$$K = |A| = |A \cap M| \geqslant m$$

$$|B \cap M| \leqslant m$$

第四步：如果存在一个选手 $x \in B \cap M$ 和一个团 $C \subset B$ 使得

$$|C| = k + 1$$

但 $x \notin C$，则移动 x 到教室 A，则结论已成立. 事实上，移动 x 到教室 A 后，教室 A 中有 M 的 $k+1$ 个成员，因此

$$C(A) = K + 1$$

但 $x \notin C$，$C(B) = |C|$ 是不减的，因此

$$C(A) = C(B) = K + 1$$

如果不存在这样的选手 x，则教室 B 中的所有 $K+1$ 个团都包含 $B \cap M$ 作为子集，这时我们进行第五步.

第五步：如果 $C(B) = K + 1$，选择 B 中的一个团 C 使得

$$|C| = K + 1$$

并移动 $\frac{C}{M}$ 中的一个元到教室 A.

注意到

$$|C| = K + 1 > m \geqslant |B \cap M|$$

所以 $\frac{C}{M}$ 是非空的.

我们每次仅移动一个人从教室 B 到教室 A，所以 $C(B)$ 至多减少 1，因此在这一个步骤结束时，总有 $C(B) = K$，这时在教室 A 中有个团 $A \cap M$，其大小

$$|A \cap M| = K$$

因此

$$C(A) \geqslant K$$

下面我们证明没有比这更大的团.

设 $Q \subset A$ 是任意一个团，我们只能证明 $|Q| \leqslant K$.

事实上，教室 A 中的元素 Q 中，存在两种类型的选手：

(1)M 中的一些成员，因为 M 是一个团，他们与 $B\cap M$ 中的所有成员都是朋友；

(2) 在第五步从教室 B 移到教室 A 中的选手，这种团中的每一个都在团 $B\cap M$，因此他们也与 $B\cap M$ 的所有成员都是朋友.

因此，Q 的所有成员都与 $B\cap M$ 的所有成员是朋友，集合 Q 和 $B\cap M$ 本身也是团，所以 $Q\cup(B\cap M)$ 也是团. 又因为 M 是最大的团，所以

$$|M|\geqslant|Q\cup(B\cap M)|=|Q|+|B\cap M|=$$
$$|Q|+|M|-|A\cap M|$$

因此

$$|Q|\leqslant|A\cap M|=K$$

故在第五步后，我们有

$$C(A)=C(B)=K$$

捷克命题

4 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BCA$ 的角平分线与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 R，与边 BC 的垂直平分线交于点 P，与边 AC 的垂直平分线交于点 Q. 设 K 与 L 分别是边 BC 和 AC 的中点. 证明：$\triangle RPK$ 和 $\triangle RQL$ 的面积相等.

解 如果

$$AC=BC$$

则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，$\triangle RQL$ 和 $\triangle RPK$ 关于角平分线 CR 是对称的，结论明显成立.

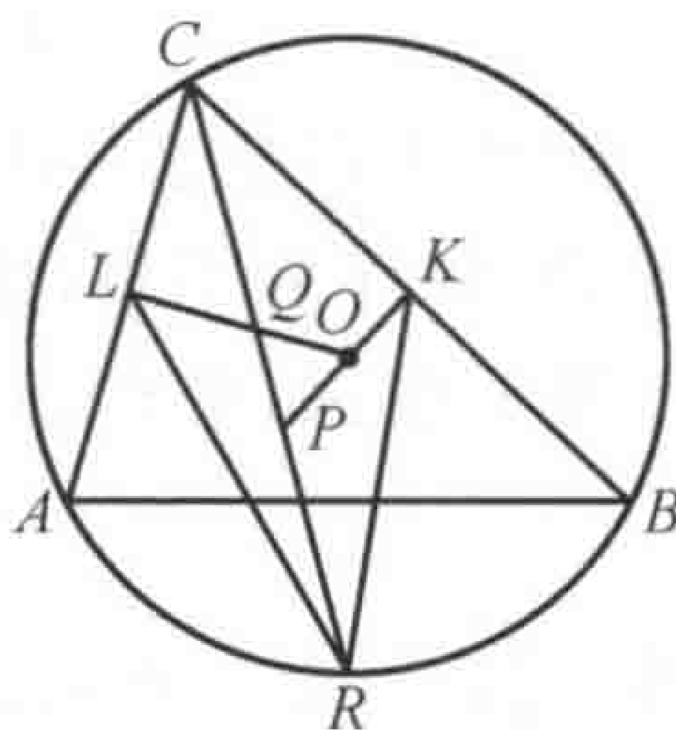


图 48.2

如果 $AC\neq BC$，不妨设 $AC<BC$. 用 O 表示 $\triangle ABC$ 的外心，注意到直角 $\triangle CLQ$ 与直角 $\triangle CKP$ 是相似的，所以

$$\angle CPK=\angle CQL=\angle OQP \text{ 且 } \frac{QL}{PK}=\frac{CQ}{CP} \quad ①$$

设 l 是弦 CR 的垂直平分线，则 l 过外心 O.

由于 $\triangle OPQ$ 是等腰三角形，所以点 P 和 Q 是 CR 上关于 l 对称的两点. 所以

$$RP=CQ \text{ 且 } RQ=CP \quad ②$$

因此由式 ①，② 有

$$\frac{S(\triangle RQL)}{S(\triangle RPK)}=\frac{\frac{1}{2}RQ\cdot QL\cdot\sin\angle RQL}{\frac{1}{2}RP\cdot PK\cdot\sin\angle RPK}=$$
$$\frac{RQ}{RP}\cdot\frac{QL}{PK}=\frac{CP}{CQ}\cdot\frac{CQ}{CP}=1$$

因此

$$S(\triangle RQL)=S(\triangle RPK)$$

5 设 a 与 b 为正整数，已知 $4ab-1$ 整除 $(4a^2-1)^2$，证明：$a=b$.

英国命题

解 我们把满足

$$4ab-1 \mid (4a^2-1)^2$$

但 $a\neq b$ 的正整数对 (a,b) 叫作“坏对”，我们只需证明坏对不存在，我们用无穷递降法来证明这个结论.

性质(Ⅰ) 如果 (a,b) 是坏对且 $a<b$，则存在一个正整数 $c<a$ 使得 (a,c) 也是坏对.

事实上，设

$$r=\frac{(4a^2-1)^2}{4ab-1}$$

则

$$r=-r\cdot(-1)\equiv -r(4ab-1)=$$
$$-(4a^2-1)^2\equiv -1 \pmod{4a}$$

因此存在某个正整数 c 使得

$$r=4ac-1$$

由 $a<b$，我们有

$$4ac-1=\frac{(4a^2-1)^2}{4ab-1}<4a^2-1$$

因此 $c<a$，由构造知

$$4ac-1 \mid (4a^2-1)^2$$

所以 (a,c) 也是坏对，性质(Ⅰ)得证.

性质(Ⅱ) 如果 (a,b) 是坏对，则 (b,a) 也是坏对.

事实上，由

$$1=1^2\equiv (4ab)^2 \pmod{4ab-1}$$

我们有

$$(4b^2-1)^2\equiv (4b^2-(4ab)^2)^2=$$
$$16b^4(4a^2-1)^2\equiv$$
$$0 \pmod{4ab-1}$$

因此

$$4ab-1 \mid (4b^2-1)^2$$

性质(Ⅱ)得证.

下面证明坏对不存在.

用反证法，假设存在一个坏对，取使得 $2a+b$ 是最小值的坏对.

如果 $a<b$，由性质(Ⅰ)知存在坏对 (a,c)，满足 $c<b$，使得

$$2a+c<2a+b$$

矛盾.

如果 $b<a$，由性质(Ⅱ)知(b,a)也是坏对，这时也有

$$2b+a<2a+b$$

矛盾.

这说明坏对不存在，故 $a=b$.

荷兰命题

6 设 n 是一个正整数. 考虑

$$S=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\{0,1,\cdots,n\},x+y+z>0\}$$

这样一个三维空间中具有$(n+1)^3-1$个点的集合，问：最少要多少个平面，它们的并集才能包含 S，但不含$(0,0,0)$.

解 答案是 $3n$ 个平面.

很容易发现 $3n$ 个平面能满足要求，例如平面 $x=i,y=i$ 和 $z=i(i=1,2,\cdots,n)$，易见这 $3n$ 个平面的并集包含 S，使其不含原点. 另外的例子是平面集

$$x+y+z=k,k=1,2,\cdots,3n$$

我们证明 $3n$ 是最少可能数. 下面的引理是关键的.

引理 考虑 k 个变量的非零多项式 $P(x_1,\cdots,x_k)$. 若所有满足 $x_1,\cdots,x_k\in\{0,1,\cdots,n\}$ 且 $x_1+\cdots+x_k>0$，点$(x_1,\cdots,x_k)$都是 $P(x_1,\cdots,x_k)$ 的零点，且 $P(0,0,\cdots,0)\neq 0$，则

$$\deg P\geqslant kn$$

引理的证明 我们对 k 用归纳法：当 $k=0$ 时，由 $P\neq 0$ 知结论成立. 现假设结论对 $k-1$ 成立，下证结论对 k 成立.

令 $y=x_k$，设 $R(x_1,\cdots,x_{k-1},y)$ 是 P 被

$$Q(y)=y(y-1)\cdots(y-n)$$

除的余式.

因为多项式 $Q(y)$ 以 $y=0,1,\cdots,n$ 为 $n+1$ 个零点，所以

$$P(x_1,\cdots,x_{k-1},y)=R(x_1,\cdots,x_{k-1},y)$$

对所有 $x_1,\cdots,x_{k-1},y\in\{0,1,\cdots,n\}$ 成立，因此R也满足引理的条件，进一步有

$$\deg R\leqslant n$$

又明显地

$$\deg R\leqslant \deg P$$

所以只要证明

$$\deg R\geqslant nk$$

便可.

现在，将多项式 R 写成 y 的降幂形式

$$R(x_1,\cdots,x_{k-1},y)=R_n(x_1,\cdots,x_{k-1})y^n+R_{n-1}(x_1,\cdots,x_{k-1})y^{n-1}+\cdots+R_0(x_1,\cdots,x_{k-1})$$

下面我们证明 $R_n(x_1,\cdots,x_{k-1})$ 满足归纳假设的条件.

事实上,考虑多项式

$$T(y)=R(0,\cdots,0,y)$$

易见

$$\deg T(y)\leqslant n$$

这个多项式有 n 个根,$y=1,\cdots,n$.

另一方面,由 $T(0)\neq 0$ 知 $T(y)\neq 0$. 因此

$$\deg T=n$$

且它的首项系数是

$$R_n(0,\cdots,0)\neq 0$$

(特别地,在 $k=1$ 的情况下,我们得到系数 R_n 是非零的).

类似地,取任意

$$a_1,\cdots,a_{k-1}\in\{0,1,\cdots,n\}$$

且

$$a_1,\cdots,a_{k-1}>0$$

在多项式 $R(x_1,\cdots,x_{k-1},y)$ 中,令 $x_i=a_i$,我们得到 y 的多项式 $R(a_1,\cdots,a_{k-1},y)$ 以 $y=0,\cdots,n$ 为根且

$$\deg R\leqslant n$$

因此它是一个零多项式.

所以

$$R_i(a_1,\cdots,a_{k-1})=0,i=0,1,\cdots,n$$

特别有

$$R_n(a_1,\cdots,a_{k-1})=0$$

这样我们就证明了多项式 $R_n(x_1,\cdots,x_{k-1})$ 满足归纳假设的条件,所以

$$\deg R_n\geqslant(k-1)n$$

故

$$\deg R\geqslant\deg R_n+n\geqslant kn$$

引理得证.

回到原题,假设 N 个平面的并集包含 S 但不含原点,设它们的方程是

$$a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0$$

考虑多项式

$$P(x,y,z)=\prod_{i=1}^{N}(a_ix+b_iy+c_iz+d_i)$$

它的阶为 N. 对任何

$$(x_0, y_0, z_0) \in S$$

这个多项式有性质

$$P(x_0, y_0, z_0) = 0$$

但

$$P(0,0,0) \neq 0$$

因此由引理我们得到

$$N = \deg P \geqslant 3n$$

说明 这是一类实代数几何问题,值得关注.

第 48 届国际数学奥林匹克英文原题

The forty-eighth IMO was held from July 19th to July 31th 2007 in the city of Vietnam.

1 Real numbers $a_1, a_2, \cdots, a_n$ are given. For each $i, (1 \leqslant i \leqslant n)$, define

(New Zealand)

$$d_i = \max\{a_j \mid 1 \leqslant j \leqslant i\} - \min\{a_j \mid i \leqslant j \leqslant n\}$$

and let

$$d = \max\{d_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

(a) For any real numbers $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$, Prove that

$$\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \geqslant \frac{d}{2} \qquad (*)$$

(b) Show that there are real numbers $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ such that the equality holds in (*).

2 Consider five points A, B, C, D and E such that $ABCD$ is a parallelogram and $BCED$ is a cyclic quadrilateral. Let l be a line passing through A. Suppose that l intersects the interior of the segment DC at F and intersects line BC at G. Suppose also that $EF = EG = EC$. Prove that l is the bisector of angle DAB.

(Luxembourg)

3 In a mathematical competition, some competitors are friends. Friendship is always mutual. Call a group of competitors a *clique* if each two of them are friends. (In particular, any group of fewer than two competitiors is a clique).

(Russia)

Given that, in this competition, the largest size of a clique is even, prove that the competitors can be arranged into two rooms such that the largest size of a clique contained in one room is the same as the largest size of a clique contained in the other room.

❹ In triangle ABC, the bisector of angle BCA intersects the circumcircle again at R, the perpendicular bisector of BC at P, and the perpendicular bisector of AC at Q. The midpoint of BC is K and the midpoint of AC is L. Prove that the triangles RPK and RQL have the same area.

(Czech Republic)

❺ Let a and b be positive integers. Show taht if $4ab-1$ divides $(4a^2-1)^2$, then $a=b$.

(England)

❻ Let n be a positive integer. Consider

$$S=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\{0,1,\cdots,n\},x+y+z>0\}$$

as a set of $(n+1)^3-1$ points in the three-dimensional space. Determine the smallest possible number of planes, the union of which contains S but does not include $(0,0,0)$.

(Netherlands)

第 48 届国际数学奥林匹克预选题

越南,2007

代数部分

1 给定实数数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$. 对于每个 $i(1\leqslant i\leqslant n)$,定义

$$d_i=\max\{a_j\mid 1\leqslant j\leqslant i\}-\min\{a_j\mid i\leqslant j\leqslant n\}$$

并令

$$d=\max\{d_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$$

证明:(1) 对任意实数 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$,有

$$\max\{|x_i-a_i|\mid 1\leqslant i\leqslant n\}\geqslant\frac{d}{2}\qquad(*)$$

(2) 存在实数数列 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$,使式(*)的等号成立.

证明 (1) 记

$$u=\max\{|x_i-a_i|\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$$

则对每个 i,有

$$x_i-u\leqslant a_i\leqslant x_i+u$$

由 x_i 的单调性

$$\max\{a_j\mid 1\leqslant j\leqslant i\}\leqslant x_i+u$$
$$\min\{a_j\mid i\leqslant j\leqslant n\}\geqslant x_i-u$$

故每个

$$d_i\leqslant x_i+u-(x_i-u)=2u$$

从而

$$d\leqslant 2u$$

(2) 取

$$x_i=\max\{a_j\mid 1\leqslant j\leqslant i\}-\frac{d}{2}$$

则

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$$

对每个 i,有

$$a_i\leqslant\max\{a_j\mid 1\leqslant j\leqslant i\}=d_i+\min\{a_j\mid i\leqslant j\leqslant n\}\leqslant d+a_i$$

故

$$-\frac{d}{2} \leqslant x_i - a_i \leqslant \frac{d}{2}$$

另一方面，设 a_k 是所有 a_i 的最大者，则

$$x_k = a_k - \frac{d}{2}, |x_k - a_k| = \frac{d}{2}$$

故式(*)等号成立.

2 设函数 $f:\mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$，对一切 $m,n \in \mathbf{N}^*$ 满足条件

$$f(m+n) \geqslant f(m) + f(f(n)) - 1$$

试求 $f(2\ 007)$ 的所有可能值.

解 对任意正整数 $m > n$，有

$$f(m) = f(n+m-n) \geqslant f(n) + f(f(m-n)) - 1 \geqslant f(n)$$

故 f 不减.

$f=1$ 显然是一个解. 设 f 不恒等于 1，则有最小的 $a \in \mathbf{N}^*$ 满足 $f(a) > 1$，对一切整数 $b > a$，都有

$$f(b) \geqslant f(a) > 1$$

若有 $n \in \mathbf{N}^*$ 使得

$$f(n) > n$$

则

$$f(f(n)) = f(f(n) - n + n) \geqslant f(f(n) - n) + f(f(n)) - 1$$

故

$$f(f(n) - n) \leqslant 1, f(n) - n < a$$

因此所有的 $f(n) - n$ 有最大值 $c \geqslant 1$，设

$$f(k) - k = c$$

由

$$\begin{aligned} 2k + c \geqslant f(2k) = f(k+k) \geqslant \\ f(k) + f(f(k)) - 1 \geqslant \\ f(k) + f(k) - 1 = \\ 2(k+c) - 1 \end{aligned}$$

得到 $c \leqslant 1$，故 $c = 1$. 于是总有

$$f(n) \leqslant n + 1, n \in \mathbf{N}^*$$

特别

$$f(2\ 007) \leqslant 2\ 008$$

另一方面，令

$$f_j(n) = \max\{1, n + j - 2\ 007\}, 1 \leqslant j \leqslant 2\ 007$$

$$f_{2\ 008}(n) = \begin{cases} n+1, 2\ 007 \mid n \\ n, 其他\ n \end{cases}$$

显然

$$f_j(2\ 007)=j,1\leqslant j\leqslant 2\ 008$$

且 f_j 不减.下证它们都满足本题条件.

对于 $j\leqslant 2\ 007$,有

$$f_j(n)\leqslant n$$

故由单调性

$$f_j(f_j(n))\leqslant n$$

对任意的 $m,n\in\mathbf{N}^*$,若 $f_j(m)=1$,则

$$f_j(m+n)\geqslant f_j(n)\geqslant f_j(f_j(n))=f_j(m)+f_j(f_j(n))-1$$

而若 $f_j(m)>1$,则

$$\begin{aligned}&f_j(m)+f_j(f_j(n))-1\leqslant\\&m+j-2\ 007+n-1=\\&(m+n)+j-2\ 007-1<f_j(m+n)\end{aligned}$$

对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,$n\leqslant f_{2\ 008}(n)\leqslant n+1$,且

$$f_{2\ 008}(f_{2\ 008}(n))\leqslant n+1$$

(n 与 $n+1$ 不同被 2 007 整除).若

$$2\ 007\mid(m+n)$$

则

$$\begin{aligned}&f_{2\ 008}(m+n)=m+n+1=\\&(m+1)+(n+1)-1\geqslant\\&f_{2\ 008}(m)+f_{2\ 008}(f_{2\ 008}(n))-1\end{aligned}$$

而若

$$2\ 007\nmid(m+n)$$

则 m,n 中至少有一个不被 2 007 整除,亦有

$$f_{2\ 008}(m+n)=m+n\geqslant f_{2\ 008}(m)+f_{2\ 008}(f_{2\ 008}(n))-1$$

因此 $f(2\ 007)$ 的所有可能取值是 $1,2,\cdots,2\ 008$.

注 对于 $j\leqslant 2\ 007$,满足条件的 f_j 还有,例如

$$f_j(n)=\begin{cases}1,n<2\ 007\\j,n=2\ 007\\n,n>2\ 007\end{cases}$$

$$f_j(n)=\max\left\{1,\left[\frac{jn}{2\ 007}\right]\right\}$$

$f_{2\ 008}$ 也可任取 2 007 的大于 1 的因数 d,令

$$f_{2\ 008}(n)=\begin{cases}n+1,d\mid n\\n,\text{其他 }n\end{cases}$$

3 设 $n\in\mathbf{N}^*$ 和 $x,y\in\mathbf{R}_+$，满足 $x^n+y^n=1$. 求证

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right)<\frac{1}{(1-x)(1-y)}$$

证明 对于 $t\in(0,1)$，有

$$\frac{1+t^2}{1+t^4}=\frac{1}{t}-\frac{(1-t)(1-t^3)}{t(1+t^4)}<\frac{1}{t}$$

故

$$0<\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x^k}=\frac{1-x^n}{x^n(1-x)}=\frac{y^n}{x^n(1-x)}$$

$$0<\frac{1-y^n}{y^n(1-y)}=\frac{x^n}{y^n(1-y)}$$

两式相乘即得结果.

4 求所有函数 $f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$，$f(x+f(y))=f(x+y)+f(y)$ 使得对一切 $x,y\in\mathbf{R}_+$ 成立.

解 由已知条件

$$f(x+f(y))>f(x+y)$$

故

$$f(y)\neq y$$

若有 $y\in\mathbf{R}_+$ 使

$$f(y)<y$$

取

$$x=y-f(y)$$

则

$$f(y)=f(x+f(y))=f(x+y)+f(y)>f(y)$$

矛盾. 故对任意 $y\in\mathbf{R}_+$，均有

$$f(y)>y$$

因此可设

$$f(x)=x+g(x)$$

代入原方程并记 $u=x+y$ 得到

$$g(u+g(y))=g(u)+y$$

对任意 $u>y>0$ 成立.

由此推出 g 为单射. 对任意 $x,y\in\mathbf{R}_+$，取 $u>x+y$ 得到

$$g(u+g(x)+g(y))=g(u+g(x))+y=$$
$$g(u)+x+y=g(u+g(x+y))$$

由单射性

$$g(x+y)=g(x)+g(y)$$

由此推出 g 严格递增.

再由

$$g(u)+y=g(u+g(y))=g(u)+g(g(y))$$

得到

$$g(g(y))=y$$

现在若有 $x\in\mathbf{R}_+$ 使得 $g(x)>x$,由严格单调性

$$x=g(g(x))>g(x)$$

矛盾.同理若有 $g(x)<x$,也推出矛盾.故对任意 $x\in\mathbf{R}_+$,均有

$$g(x)=x,f(x)=2x$$

直接验证满足原方程.

5 设 $c>2$,非负实数数列 $a(1),a(2),\cdots$,满足

$$a(m+n)\leqslant 2a(m)+2a(n),m,n\in\mathbf{N}^*$$

及

$$a(2^k)\leqslant\frac{1}{(k+1)^c},k\in\mathbf{N}$$

求证:数列 $a(n)$ 有界.

证明　引理　设 $s_1,\cdots,s_k\in\mathbf{N}$ 且

$$\sum_{i=1}^{k}2^{-s_i}\leqslant 1$$

则对任意$n_1,\cdots,n_k\in\mathbf{N}^*$,有

$$a\left(\sum_{i=1}^{k}n_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{k}2^{s_i}a(n_i)$$

引理的证明　对 k 归纳.$k=1$ 显然,$k=2$ 由题给条件即得(此时 $s_1,s_2\geqslant 1$).设 $k>2$,不妨设

$$1\leqslant s_1\leqslant\cdots\leqslant s_k$$

由于 $\sum\limits_{i=1}^{k-1}2^{-s_i}$ 是以 $2^{s_{k-1}}$ 为分母且小于 1 的分数,故

$$\sum_{i=1}^{k-1}2^{-s_i}\leqslant 1-2^{-s_{k-1}}$$

从而

$$\sum_{i=1}^{k-2}2^{-s_i}\leqslant 1-2^{-(s_{k-1}-1)}$$

记

$$s'_{k-1}=s_{k-1}-1,n'_{k-1}=n_{k-1}+n_k$$

由于

$$\sum_{i=1}^{k-2}2^{-s_i}+2^{(-s_{k-1}-1)}\leqslant 1$$

由归纳假设得

$$a(\sum_{i=1}^{k} n_i) = a(\sum_{i=1}^{k-2} n_i + n'_{k-1}) \leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{k-2} 2^{s_i} a(n_i) + 2^{s_{k-1}-1} a(n_{k-1} + n_k) \leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{k-2} 2^{s_i} a(n_i) + 2^{s_{k-1}} (a(n_{k-1}) + a(n_k)) \leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{k} 2^{s_i} a(n_i)$$

引理证毕.

回到原题.

现在记 $q = \frac{c}{2}$,设任一 $n \in \mathbf{N}^*$ 的二进制表达式为

$$\sum_{i=1}^{k} 2^{u_i}, 0 \leqslant u_1 < \cdots < u_k$$

又令

$$s_i = d + [\log_2 (u_i + 1)^q], 1 \leqslant i \leqslant k$$

其中 d 是待定的整数. 则

$$\sum_{i=1}^{k} 2^{-s_i} = 2^{-d} \sum_{i=1}^{k} 2^{-[\log_2 (u_i+1)^q]}$$

可选取 d 使这个和式属于 $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$. 此时

$$2^d < 2 \sum_{i=1}^{k} 2^{-[\log_2 (u_i+1)^q]} < 4 \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(u_i + 1)^q}$$

由引理

$$a(n) = a(\sum_{i=1}^{k} 2^{u_i}) \leqslant \sum_{i=1}^{k} 2^{s_i} a(2^{u_i}) \leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{k} 2^d (u_i + 1)^q (u_i + 1)^{-2q} <$$
$$4\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(u_i + 1)^q}\right)^2 < 4\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^q}\right)^2$$

注 1) 引理给出的上界是最优的. 事实上,对每个 $n \in \mathbf{N}^*$,令

$$a(n) = \min\{\sum_{i=1}^{k} 2^{s_i} (u_i + 1)^{-c} \mid k \in \mathbf{N}^*, \sum_{i=1}^{k} 2^{u_i} = n, \sum_{i=1}^{k} 2^{-s_i} \leqslant 1\} \quad (*)$$

则这个数列满足题给条件. 显然

$$a(2^u) \leqslant (u + 1)^{-c}$$

又对任意 $m, n \in \mathbf{N}^*$,设

$$a(m)=\sum_{i=1}^{k}2^{s_i}(u_i+1)^{-c},\ \sum_{i=1}^{k}2^{u_i}=m,\ \sum_{i=1}^{k}2^{-s_i}\leqslant 1$$

$$a(n)=\sum_{i=1}^{p}2^{r_i}(v_i+1)^{-c},\ \sum_{i=1}^{p}2^{v_i}=n,\ \sum_{i=1}^{p}2^{-r_i}\leqslant 1$$

由于

$$\sum_{i=1}^{k}2^{u_i}+\sum_{i=1}^{p}2^{v_i}=m+n$$

$$\sum_{i=1}^{k}2^{-(s_i+1)}+\sum_{i=1}^{p}2^{-(r_i+1)}\leqslant 1$$

故

$$a(m+n)\leqslant 2(a(m)+a(n))$$

2) 条件 $c>2$ 是必要的. 取 $a(n)$ 为式(*). 此时最小值必在 u_i 互不相同(即 $\sum_{i=1}^{k}2^{u_i}$ 是 n 的二进制表达式)时达到. 反设 $u_{k-1}=u_k$, 将它们合成

$$u'_{k-1}=u_k+1$$

并令

$$s'_{k-1}=\min(s_{k-1},s_k)$$

由于

$$2(u_k+1)^{-c}>(u_k+2)^{-c}$$

矛盾.

特别

$$a(2^u)=(u+1)^{-c}$$

由柯西(Cauchy) 不等式

$$a(2^u-1)=a(\sum_{i=1}^{u}2^{i-1})=\sum_{i=1}^{u}2^{s_i}i^{-c}\geqslant$$

$$\sum_{i=1}^{u}2^{-s_i}\sum_{i=1}^{u}2^{s_i}i^{-c}\geqslant$$

$$\left(\sum_{i=1}^{u}\frac{1}{i^q}\right)^2$$

$q\leqslant 1$ 时右边无界.

也可给出直接的反例

$$a(\sum_{i=1}^{k}2^{u_i})=\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{(u_i+1)^2}$$

6 设非负实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$, 满足

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2=1$$

求证

$$a_1^2a_2+a_2^2a_3+\cdots+a_{100}^2a_1<\frac{12}{25}$$

证明 由柯西不等式及平均不等式

$$3S=\sum_{i=1}^{100}(a_i^2a_{i+1}+2a_{i+1}^2a_{i+2})=$$

$$\sum_{i=1}^{100}a_{i+1}(a_i^2+2a_{i+1}a_{i+2})\leqslant$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{100}a_i^2\sum_{i=1}^{100}(a_i^2+2a_{i+1}a_{i+2})^2}=$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{100}(a_i^4+4a_i^2a_{i+1}a_{i+2}+4a_{i+1}^2a_{i+2}^2)}\leqslant$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{100}(a_i^4+6a_i^2a_{i+1}^2+2a_i^ia_{i+2}^2)}$$

利用

$$\sum_{i=1}^{100}(a_i^4+2a_i^2a_{i+1}^2+2a_i^2a_{i+2}^2)\leqslant(\sum_{i=1}^{100}a_i^2)^2$$

$$4\sum_{i=1}^{100}a_i^2a_{i+1}^2\leqslant 4\sum_{i=1}^{50}a_{2i}^2\sum_{i=1}^{50}a_{2i-1}^2\leqslant(\sum_{i=1}^{100}a_i^2)^2$$

最后得

$$9S^2\leqslant 2,S\leqslant\frac{\sqrt{2}}{3}<\frac{12}{25}$$

注 一般,给定 $n\in\mathbf{N}^*$,使不等式

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2a_{i+1}\leqslant k(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)^{\frac{3}{2}}$$

对任意非负实数 a_i 恒成立的最佳常数记作 k_n. 由拉格朗日(Lagrange)乘子法得到最值点

$$a_{i-1}^2+2a_ia_{i+1}=\lambda\cdot 2a_i,1\leqslant i\leqslant n$$

$n\leqslant 4$ 时,$k_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$($a_1=\cdots=a_n$ 时达到). $n\geqslant 5$ 时,计算机算得 $k_n\approx 0.451\ 4$($a_1\approx 0.587\ 3$,$a_2\approx 0.677\ 1$,$a_3\approx 0.422\ 4$,$a_4\approx 0.134\ 4$,$a_5\approx 0.013\ 3$,其他 $a_n=0$ 时达到).

7 n 为正整数

$$S=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\{0,1,\cdots,n\},x+y+z>0\}$$

是三维空间中 $(n+1)^3-1$ 个点的集合. 试求其并集包含 S 但不含 $(0,0,0)$ 的平面个数的最小值.

解 设 $f(x,y,z)$ 为三元多项式,总次数

$$\deg f=k$$

定义偏差分算子 $\Delta\in\{\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z\}$

$$\Delta_x f=f(x+1,y,z)-f(x,y,z)$$

$$\Delta_y f = f(x, y+1, z) - f(x, y, z)$$
$$\Delta_z f = f(x, y, z+1) - f(x, y, z)$$

又对每个 Δ 和正整数 m，$\Delta^{(m)} f$ 表示 Δ 迭代 m 次.

引理　对每个 Δ，当 $k \geqslant 1$ 时

$$\deg(\Delta f) \leqslant k - 1$$

$k=0$ 时，Δf 恒等于 0(事实上，由二项式展开，Δ_x 使每个含 x 的项的次数减 1，每个不含 x 的项变为 0. Δ_y，Δ_z 类似).

推论　当 $r+s+t>k$ 时，$\Delta_x^{(r)} \Delta_y^{(s)} \Delta_z^{(t)} f$ 恒等于 0.

设 m 个平面

$$a_i x + b_i y + c_i z - d_i = 0, 1 \leqslant i \leqslant m, d_i \neq 0$$

满足条件，则 m 次多项式

$$f(x, y, z) = \prod_{i=1}^{m} (a_i x + b_i y + c_i z - d_i)$$

在 S 的每点处的值都等于 0，但 $f(0,0,0) \neq 0$.

若 $m < 3n$，则 $\Delta_x^{(n)} \Delta_y^{(n)} \Delta_z^{(n)} f$ 恒等于 0. 利用一元函数的差分公式

$$\Delta^{(n)} P(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i P(x+i)$$

可得

$$\Delta_x^{(n)} \Delta_y^{(n)} \Delta_z^{(n)} f = \sum_{(i,j,k) \in S \cup \{(0,0,0)\}} (-1)^{3n-i-j-k} \cdot C_n^i C_n^j C_n^k f(x+i, y+j, z+k)$$

取

$$x = y = z = 0$$

得到

$$f(0,0,0) = \sum_{(i,j,k) \in S} (-1)^{i+j+k+1} C_n^i C_n^j C_n^k f(i, j, k) = 0$$

矛盾. 因此

$$m \geqslant 3n$$

另一方面，$3n$ 个平面

$$x - i = 0, 1 \leqslant i \leqslant n$$
$$y - j = 0, 1 \leqslant j \leqslant n$$
$$z - k = 0, 1 \leqslant k \leqslant n$$

显然符合要求(S 的每点都有一个坐标为 $1 \sim n$ 的整数).

故满足条件的平面的最少个数是 $3n$.

组合部分

1 设整数 $n>1$. 试求满足下述条件的所有数列 $a_1,a_2,\cdots,a$:

(1)$a_i\in\{0,1\}(1\leqslant i\leqslant n^2+n)$;

(2)$a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{i+n}<a_{i+n+1}+a_{i+n+2}+\cdots+a_{i+2n}$ $(0\leqslant i\leqslant n^2-n)$.

解 对于 $0\leqslant k\leqslant m$,记

$$S(k,m]=\sum_{i=1}^{m-k}a_{k+i}$$

$(k=m$ 时,$S=0)$.

由已知条件

$$0\leqslant S(0,n]<S(n,2n]<\cdots<S(n^2,n^2+n]\leqslant n$$

故

$$S(in,(i+1)n]=i,0\leqslant i\leqslant n$$

特别,对 $i=0,n$ 得到

$$a_1=\cdots=a_n=0,a_{n+1}^2=\cdots=a_{n^2+n}=1$$

归纳证明第 i 段 $(in,(i+1)n]$ 的 i 个 1 都在其末尾. $i=0$ 显然. 对于 $n>i>0$,设第 i 段的头一个 1 在第 u 项(即为 a_{in+u}). 由于前一段的 1 都在第 u 项之后,故

$$i=S((i-1)n+u,in+u]<$$
$$S(in+u,(i+1)n+u]<\cdots<$$
$$S(n-1)n+u+u,n^2+u]\leqslant n$$

于是,对于

$$i-1\leqslant j\leqslant n-1$$

有

$$S(jn+u,(j+1)n+u]=j+1$$

注意到最后一段全是 1,求总和得到

$$i-1=n-u$$

即

$$u=n-i+1$$

第 i 段的 i 个 1 都在末尾.

最后证明这个数列满足条件(2),即对任意

$$1\leqslant u\leqslant n-1,0\leqslant i\leqslant n-2$$

均有

$$S(in+u,(i+1)n+u]<S((i+1)n+u,(i+2)n+u]$$

$(u=0$ 时已由各段 1 的个数得出). 注意到第 $i+1$ 段中的 1 从第 $n-i$ 位起,故 $u<n-i$ 时

$$S(in+u,(i+1)n+u]=i$$
$$S((i+1)n+u,(i+2)n+u]\geqslant i+1$$

而 $u\geqslant u-i$ 时

$$S(in+u,(i+1)n+u]=i+1$$
$$S((i+1)n+u,(i+2)n+u]\geqslant i+2$$

因此，满足条件的数列有且只有一个，对于 $0\leqslant i\leqslant n$，有

$$a_{in+u}=\begin{cases}0,1\leqslant u\leqslant n-i\\1,n-i+1\leqslant u\leqslant n\end{cases}$$

2 一个单位正方形平行地分割为 $n>1$ 个矩形. 已知，平行于正方形的边且穿过其内部的任一直线均穿过一个矩形的内部. 求证：必有一个矩形不含正方形的边界点.

证明 称穿过正方形内部但不穿过任一矩形内部的直线为分裂线. 反设存在分割既无分裂线又无内部矩形. 则必有一个这样的分割，其矩形个数最少(必大于 2).

此时不会有两个矩形以整条边相邻(否则去掉公共边使两者合并，仍无分裂线及内部矩形). 每个矩形的边长不会等于 1(否则一条长为 1 的边是分裂线).

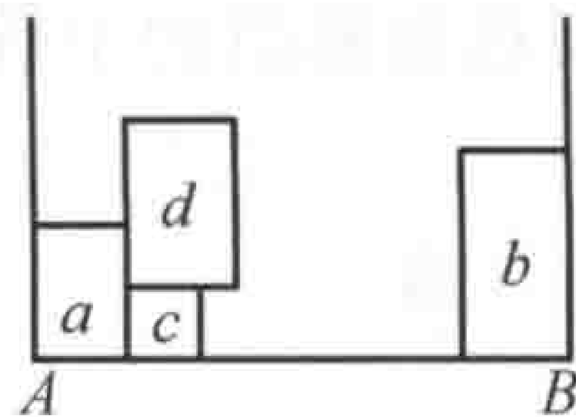


图 48.3

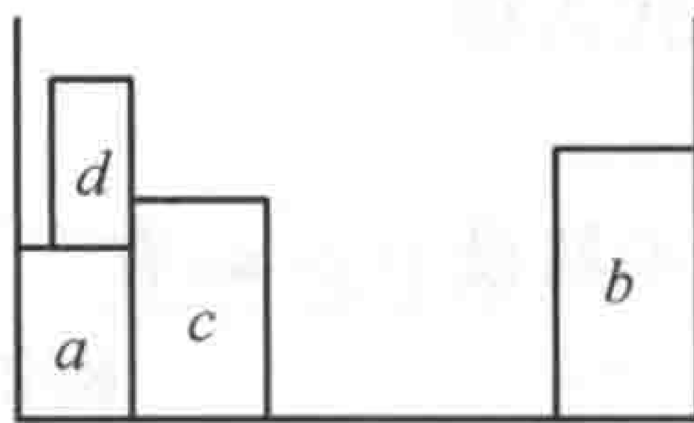


图 48.4

包含正方形的左，右下顶点 A，B 的矩形 a，b 不同. 不妨设 a 的高不大于 b 的高，又设包含 a 的右下顶点的矩形为 c(允许 $c=b$). c 与 a 的高不同. 只有两种可能：

(1) c 的高比 a 小(此时必 $c\neq b$)(图 48.3). 包含 c 的左上顶点的矩形 d 与正方形的 DA，AB，BC 边均无公共点(分别被 a，c，b 阻挡)，故 d 的上边必在 CD 上. a，c，d 的接邻边为分裂线，矛盾.

(2) c 的高比 a 大(图 48.4). 包含 a 的右上顶点的矩形 d 与 AB，BC 边无公共点(分别被 a，b 阻挡). 又因 d 与 a 的相邻边不等长(只能 d 比 a 小)，故 d 与 DA 边也无公共点. 同样得到 d 的上边在 CD 上，从而给出矛盾.

3 求所有 $n\in\mathbf{N}^*$，使得集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 的元素染红蓝两色，满足下述条件：集合 $S\times S\times S$ 恰含 2007 个有序三元组 (x,y,z)，每组的 x，y，z 同色且 $n\mid(x+y+z)$.

解 对任一染色方案，记红，蓝子集为 R，B，有

$$|R|=r,\ |B|=b=n-r$$

对每个 $(x,y)\in S\times S$，有唯一的

$$z=z(x,y)\in S$$

使(x,y,z)为整除组，故共有 n^2 个整除组. 每个二色组(x,y,z)为一红二蓝或二红一蓝，故

$$(x,y),(y,z),(z,x)$$

中有且只有一个属于 $R\times B$. 反过来，每个$(x,y)\in R\times B$ 有唯一的 z，恰属于 3 个两色整除组

$$(x,y,z),(z,x,y),(y,z,x)$$

故两色整除组的个数为

$$3\mid R\times B\mid=3rb$$

同色整除组的个数为

$$n^2-3rb=r^2-rb+b^2$$

令

$$(r+b)^2-3rb=2\ 007$$

由 $3\mid(r+b)$，推出 $3\mid(rb)$，从而 $3\mid r,b$. 令

$$r=3u,b=3v$$

代入得

$$u^2-uv+v^2=223$$

不妨设 $v\geqslant u$，有

$$892=(2u-v)^2+3v^2\geqslant 3v^2\geqslant$$
$$3v^2-3u(v-u)=$$
$$3(u^2-uv+v^2)=669$$
$$223\leqslant v^2\leqslant 297,15\leqslant v\leqslant 17$$

验算得仅当 $v=17$ 时，有整数解 $u=6,11$.

故共有两个解 $n=69,84$.

4 $A_0=(a_1,\cdots,a_n)$为有限的实数数列. 对每个 $k\in\mathbf{N}$，由数列 $A_k=(x_1,\cdots,x_n)$，依下述规则构造新数列 A_{k+1}：

(1) 作划分$\{1,2,\cdots,n\}=I\cup J$，使得 $\left|\sum_{i\in I}x_i-\sum_{j\in J}x_j\right|$ 最小(允许 I,J 之一为空，此时相应的和为 0). 若这样的划分不止一个，任选其一；

(2) 令 $A_{k+1}=(y_1,\cdots,y_n)$，其中当 $i\in I$ 时，$y_i=x_i+1$，而 $i\in J$ 时，$y_i=x_i-1$.

求证：存在 k，使得数列 A_k 中有一项 x，$|x|\geqslant\dfrac{n}{2}$.

证明 先证明引理.

引理 若数列$(x_1,\cdots,x_n)$ 的每项 $|x_i|<a$，则存在序号的划分 $I\cup J$，使得

$$\left|\sum_{i\in I}x_i-\sum_{j\in J}x_j\right|<a$$

引理的证明 对 n 归纳，$n=1$ 显然. 不妨设 $(x_1,\cdots,x_n)$ 可划分使得

$$\sum_{i\in I_1}x_i-\sum_{j\in J_1}x_j\in[0,a)$$

当 $x_{n+1}\geqslant 0$ 时，令

$$I=I_1,J=J_1\cup\{n+1\}$$

$x_{n+1}<0$ 时，令

$$I=I_1\cup\{n+1\},J=J_1$$

则

$$\sum_{i\in I}x_i-\sum_{j\in J}x_j=\sum_{i\in I_1}x_i-\sum_{j\in J_1}x_j-|x_{n+1}|\in(-a,a)$$

引理证毕.

回到本题.

反设对任意 k，$A_k=(b_1,\cdots,b_n)$ 的所有项均属于 $\left(-\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)$. 由于每个 b_i-a_i 为整数，故其可能值不多于 n 个. 因此必有 $p<q$，使得

$$A_p=A_q$$

另一方面，令

$$S_k=\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

对 A_k 依引理作划分得到

$$S_{k+1}-S_k=\sum_{i\in I}((b_i+1)^2-b_i^2)+\sum_{j\in J}((b_j-1)^2-b_j^2)=$$
$$n+2(\sum_{i\in I}b_i-\sum_{j\in J}b_j)>n-2\cdot\frac{n}{2}=0$$

即 S_k 严格递增，矛盾.

5 平面直角坐标系中定义带域 $S_n=\{(x,y)\mid n\leqslant x\leqslant n+1\}$. 设每个带域染红色或蓝色，$a,b$ 为不相等的两个正整数. 求证，必存在两边长为 a,b 的矩形，其四顶点同色.

证明 若有 $n\in\mathbf{Z}$ 使 $S_n\equiv S_{n+a}$（$\equiv$ 表示同色），则顶点为

$$(n,0),(n,b),(n+a,0),(n+a,b)$$

的矩形为所求. 同样，若有

$$S_n=S_{n+b}$$

亦得结果. 下设对任意

$$n\in\mathbf{Z},S_n\not\equiv S_{n+a},S_n\not\equiv S_{n+b}$$

此时归纳可证，对于 $u,v\in\mathbf{Z}$，$S_n\equiv S_{n+ua+vb}$ 当且仅当 $u+v$ 为偶数.

设
$$(a,b)=d,a=ud,b=vd$$
则
$$(u,v)=1$$
由于
$$va-ub=0,S_0\equiv S_{0+va-ub}$$
故
$$2\mid(u+v)$$
u,v 同为奇数. 不妨设 $a>b$,则
$$u>v,u\geqslant 3$$
存在 $k,m\in\mathbf{Z}$ 使
$$ku-mv=1$$
(从而 $ka-mb=d$). 由于 u,v 同为奇数,故 $k+m$ 为奇数. 因此对任意 $n\in\mathbf{Z}$,有
$$S_n\not\equiv S_{n+ka-mb}=S_{n+d}$$
从而
$$S_n\equiv S_{n+2d}$$
由于 $a>2d$,可取如图 48.5 的矩形
$$y_1=\sqrt{a^2-4d^2}=d\cdot\sqrt{u^2-4}\xlongequal{\Delta}d\varphi$$
由
$$\triangle ADD_0\backsim\triangle BAB_0$$
$$\frac{s-t}{y_1}=\frac{b}{a},s-t=\frac{by_1}{a}=\frac{bd}{a}\varphi$$

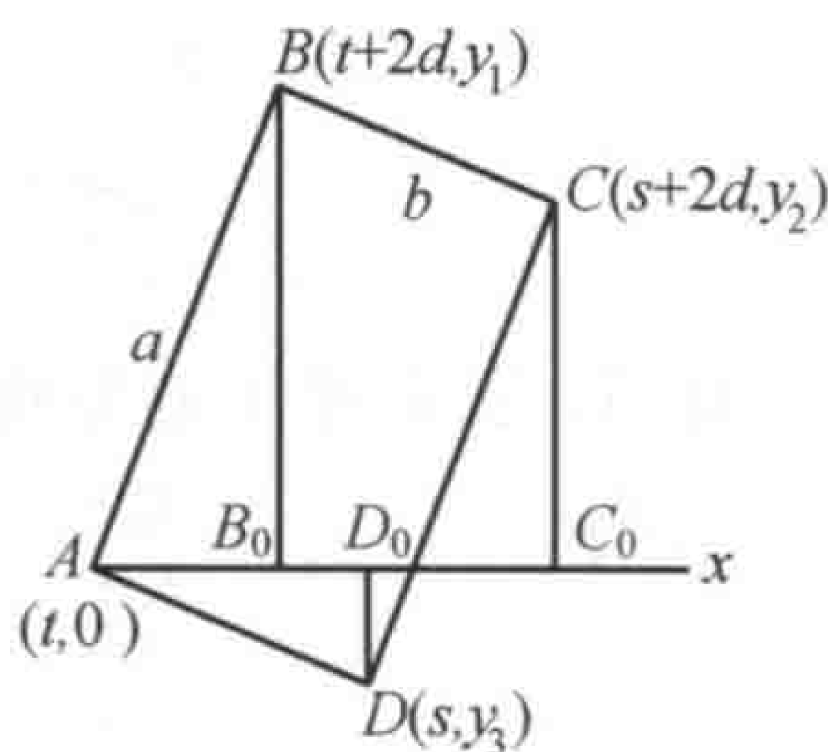


图 48.5

由于
$$u>\varphi\geqslant\sqrt{u^2-2u+2}>u-1$$
故 φ 是无理数.

显然
$$A\equiv B,C\equiv D$$
只要选取 t 使得 $A\equiv C$. 设 w 是使得存在同色的 w 个相继带域 $S_{n_0},S_{n_0+1},\cdots,S_{n_0+w-1}$ 的最大正整数(不妨设为红色). 由于
$$S_{n_0}\not\equiv S_{n_0+d}$$
故
$$w\leqslant d$$
现在因为区间
$$I=\left(n_0+\frac{bd}{a}\varphi,n_0+\frac{bd}{a}\varphi+w\right)$$
长为 w 且端点为无理数,故它跨越 $w+1$ 个相继带域,其中必有两色点. 特别,存在 $s\in I$,点 $(s,0)$ 为红色. 此时

$$t=s-\frac{bd}{a}\varphi\in(n_0,n_0+w)$$

$(t,0)$ 也是红色.

注　$a=b$ 时,结论不成立.例如,可将平面分割成宽为 a 的竖直带域,交替染二色(即当且仅当 $\left[\frac{n}{a}\right]$ 为偶数时,S_n 染红色).任一边长为 a 的正方形,不妨设它的最左边顶点为 $A(x,0)$,$0\leqslant x<a$.又设 AB,AD 中,AB 与 X 轴的夹角 θ 较小,$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.则点 B,C 的横坐标

$$x_B=x+a\cos\theta$$

$$x_c=x+\sqrt{2}a\cos(45^\circ-\theta)=x+a(\cos\theta+\sin\theta)$$

由于 $x_B<2a$,为使 B 为红色,必须

$$x+a\cos\theta<a$$

但此时由于

$$\cos\theta+\sin\theta\geqslant 1$$

故

$$a\leqslant x_c<a(1+\sin\theta)<2a$$

C 为蓝色.

6 数学竞赛的一些参赛者是朋友.朋友关系是相互的.若一组参赛者中每两个都是朋友,称为一个团.(只含一个人的组也是团).

已知某次竞赛中最大团的人数为偶数,证明:可以安排在两间教室进行考试,使得一间所含的最大团的人数等于另一间所含的最大团的人数.

解　对于全体考生集 G 的任一子集 A,记 A 所含的最大团的人数为 $m(A)$,对 G 的任一划分 (A,B),令

$$f(A,B)=m(A)-m(B)$$

设 G 的最大团为 K_{2n}.

从

$$A_0=G,B_0=\Phi$$

开始,逐个地将 K_{2n} 的元素移入 B,最后($2n$ 步后)成为

$$A_{2n}=\frac{G}{K_{2n}},B_{2n}=K_{2n}$$

由于

$$f(A_0,B_0)=2n,f(A_{2n},B_{2n})\leqslant 0$$

而且每步操作使 $m(A)$ 不变或减小 1,$m(B)$ 增加 1(特别,每步后

$m(A)+m(B)\geqslant 2n$). 故必有 k, 使得 k 步后成为以下两种情形之一:

(1) $f(A_k,B_k)=0$, 此时 (A_k,B_k) 为所求的划分.

(2) $f(A_k,B_k)=1$, 但

$$f(A_{k+1},B_{k+1})=-1$$

由于 $B_k=K_k$, 故

$$m(A_k)=k+1,k\geqslant n$$

记

$$S=A_k\cap K_{2n},\ |S|=2n-k\leqslant k$$

A_k 中的每个 $k+1$ 团都含有不属于 S 的元素.

若存在 $x\in S$, 不属于 A_k 中的某个 $k+1$ 团, 第 $k+1$ 步改为将 x 移入 B, 就有

$$m(A_{k+1}^*)=m(B_{k+1}^*)=k+1$$

新的 (A_{k+1}^*,B_{k+1}^*) 为所求.

若 S 是 A_k 中的每个 $k+1$ 团的真子集, 只要 A_k 中有 $k+1$ 团, 就可取出它的一个不属于 S 的元素, 使之变为 k 团. 故可取出 A_k 的一个与 S 不交的子集 T, 使得 $m(\frac{A_k}{T})=k$. 第 $k+1$ 步改为将整个 T 移入 B. 则

$$m(A_{k+1}^*)=k$$

只要证明此时亦有

$$m(B_{k+1}^*)=k$$

则新的 (A_{k+1}^*,B_{k+1}^*) 为所求.

反设

$$m(B_{k+1}^*)\geqslant k+1$$

则必有 T 的 u 元子集 T_1 与 B_k 的 $k+1-u$ 元子集 C 构成团 ($u\geqslant 1$). 于是 $S\cup T_1\cup C$ 是 G 的一个团. 但是

$$|S\cup T_1\cup C|=2n-k+u+k+1-u=2n+1$$

矛盾 (K_{2n} 是 G 的最大团).

7 设正数 $\alpha<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. 求证: 存在正整数 n 和 $p>\alpha\cdot 2^n$, 使得集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 有 $2p$ 个互不相同的子集 $S_1,\cdots,S_p$, $T_1,\cdots,T_p$, 满足 $S_i\cap T_j\neq\varnothing(1\leqslant i,j\leqslant p)$.

证明 设 $n=km$, 将 $A=\{1,2,\cdots,n\}$ 划分为 k 个 m 元子集 $A_1,\cdots,A_k$. 考虑 A 的子集族

$$S=\{B\subseteq A\mid i,B\cap A_i\neq\varnothing\}$$
$$T_1=\{C\subseteq A\mid i,C\supseteq A_i\}$$

并记

$$T=\frac{T_1}{S}$$

由作法，S 与 T 满足题给条件. 只要选取 k,m，使得 $|S|$ 及 $|T|$ 均大于 $\alpha\cdot 2^n$.

每个 $B\in S$ 由 $B\cap A_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 确定，每个 A_i 的不空子集个数为 2^m-1，故

$$|S|=(2^m-1)^k$$

又因每个 A_i 的真子集个数为 2^m-1，故

$$|T_1|=2^{km}-(2^m-1)^k$$

另外，每个 $B\in\frac{S}{T_1}$ 的 $B\cap A_i$ 是 A_i 的不空真子集，故

$$\left|\frac{S}{T_1}\right|=(2^m-2)^k$$

于是

$$\begin{aligned}|T|=&|T_1|-|T_1\cap S|=\\&|T_1|-\left(|S|-\left|\frac{S}{T_1}\right|\right)=\\&2^{km}-2(2^m-1)^k+(2^m-2)^k\end{aligned}$$

记

$$u=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

令

$$k=\left[2^m\cdot\ln\frac{1}{u}\right]$$

则

$$\lim_{m\to\infty}\frac{|S|}{2^n}=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^m}\right)^k=\mathrm{e}^{\lim\limits_{m\to\infty}\frac{-k}{2^m}}=\mathrm{e}^{\ln u}=u$$

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\frac{|T|}{2^n}=&1-2\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^m}\right)^k+\\&\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{2}{2^m}\right)^k=\\&1-2u+u^2=u\end{aligned}$$

故 m 充分大时，$|S|$ 及 $|T|$ 均大于 $\alpha\cdot 2^n$.

注 可证 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 为最优值，即满足条件的

$$p<(3-\sqrt{5})2^{n-1}$$

8 平面凸 n 边形 P 的每三个顶点构成一个三角形.称这种三角形为"好的",若它的三边长均为 1.

求证:好三角形的个数不大于$\frac{2}{3}n$.

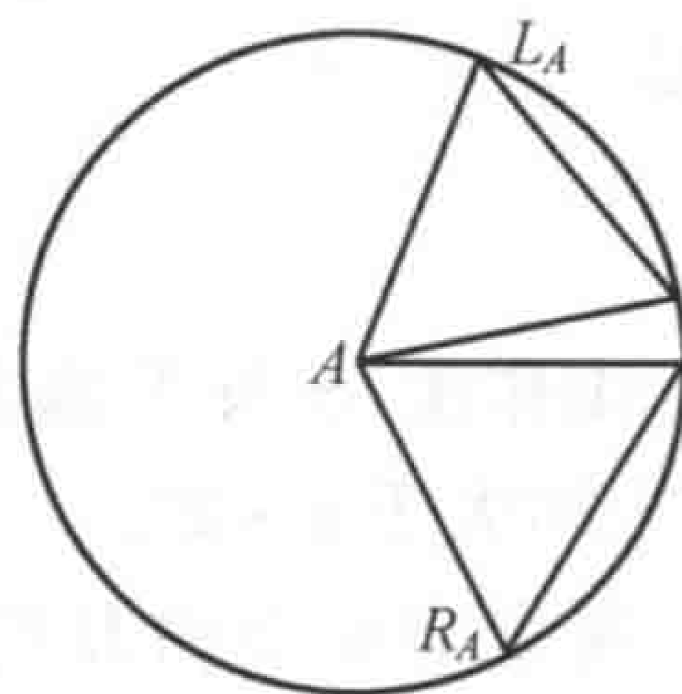


图 48.6

证明 由 P 的凸性,以 A 为一顶点的所有好三角形的另两个顶点都在以 A 为圆心的单位圆周 ω_A 上一段小于 $180°$ 的弧中.设该弧依顺时针方向的左,右端点为 L_A,R_A.分别称以 AL_A,AR_A 为一边的好三角形为 A 外的左,右特征三角形(两者可重合).每个顶点处的特征三角形不多于两个,故特征三角形的累计总次数不多于 $2n$(图 48.6).

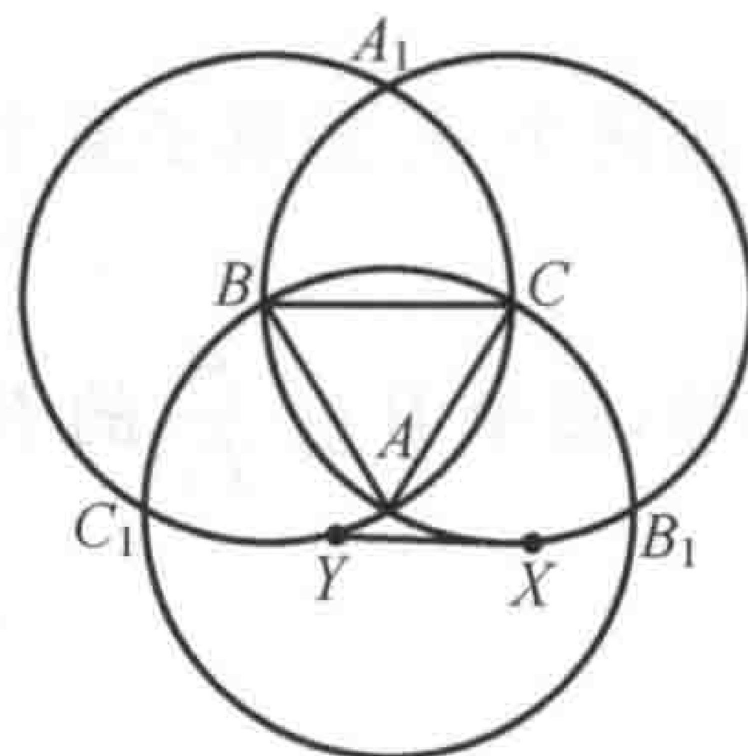


图 48.7

另一方面,考虑任一顺时针方向的好三角形 ABC(图 48.7).若 $A=L_C$ 或 R_B,则由循环对称性,亦有 $B=L_A$ 或 R_C,且 $C=L_B$ 或 R_A.故 ABC 作为特征三角形不少于三次.

若 $A\neq L_C$ 及 R_B,设

$$\omega_A\cap\omega_B=C_1,\omega_B\cap\omega_C=A_1,\omega_C\cap\omega_A=B_1$$

令 C 处的左特征三角形为 $CL_CL'_C$.由于

$$\angle L_CCB<180°$$

故必有

$$X\in\{L_C,L'_C\}$$

位于弧区间$(A,B_1]$中.同理必有

$$Y\in\{R_B,R'_B\}$$

位于弧区间$(A,C_1]$中.此时 A 在凸四边形 $BCXY$ 内,与 P 的凸性矛盾.

因此每个好三角形作为特征三角形均不少于三次.推出好三角形个数

$$t\leqslant\frac{2}{3}n$$

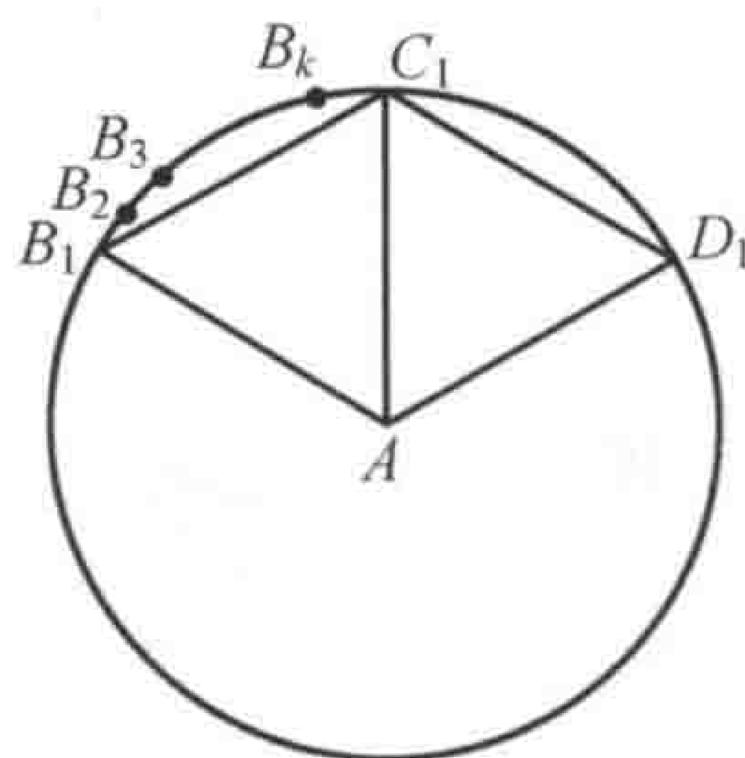


图 48.8

注 设 AB 为 P 的一条直径,可证以 A(B 亦是)为一顶点的每个好三角形作为特征三角形均不少于四次.由此得到

$$t\leqslant\left[\frac{2(n-1)}{3}\right]$$

另一方面(图 48.8),在 ω_A 的 $60°$ 弧 B_1C_1 内取点 $B_2,\cdots,B_k$,并同向延拓为 $60°$ 菱形,得到凸 $3k+1$ 边形

$$AB_1\cdots B_kC_1\cdots C_kD_1\cdots D_k$$

它有 $2k$ 个好三角形 $AB_iC_i,AC_iD_i(1\leqslant i\leqslant k)$.

去掉 D_k,得到凸 $3k$ 边形有 $2k-1$ 个好三角形,再去掉 D_{k-1},得到凸 $3k-1$ 边形有 $2k-2$ 个好三角形.因此,好三角形个数的最大

值是$\left[\frac{2(n-1)}{3}\right]$.

几何部分

❶ $\triangle ABC$ 中,顶点 C 处的角平分线分别与外接圆周及 BC,CA 边的中垂线交于点 R,P,Q. BC,CA 的中点分别是 K,L. 求证:三角形 RQL 与 RPK 等面积(图 48.9).

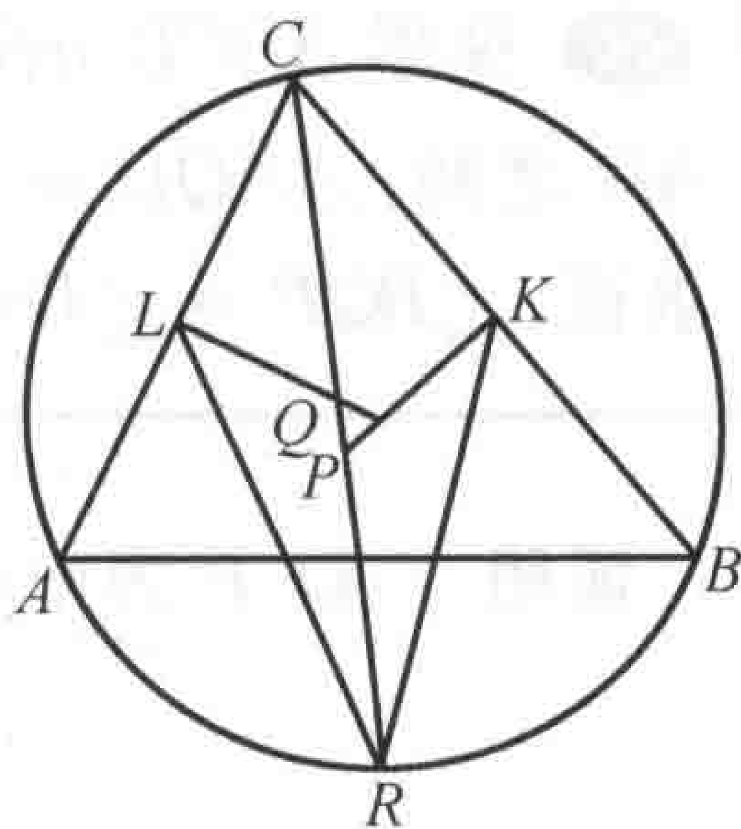


图 48.9

证明 设外接圆半径为 r,则

$$CR=2r\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)$$

$$CQ=\frac{CL}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{b}{2\cos\frac{C}{2}}$$

故

$$\frac{QR}{CR}=1-\frac{CQ}{CR}=1-\frac{b}{4r\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)\cos\frac{C}{2}}=$$

$$1-\frac{b}{2r(\sin(A+C)+\sin A)}=1-\frac{b}{a+b}=\frac{a}{a+b}$$

交换 a 与 b 得

$$\frac{PR}{CR}=\frac{b}{a+b}$$

又

$$QL=\frac{b}{2}\tan\frac{C}{2},PK=\frac{a}{2}\tan\frac{C}{2}$$

因此

$$QR\cdot QL=PR\cdot PK$$

再由

$$\angle LQR=\angle KPR\left(=90^\circ+\frac{C}{2}\right)$$

即得三角形 RQL 与 RPK 面积相等.

❷ 等腰三角形 ABC 中,$AB=AC$. 边 BC 的中点为 M. 设 X 是 $\triangle ABM$ 的外接圆周的小弧 MA 上的动点. T 是角域 BMA 中的点,$\angle TMX=90^\circ$ 且 $TX=BX$.

求证:$\angle MTB-\angle CTM$ 与 X 的位置无关(图 48.10).

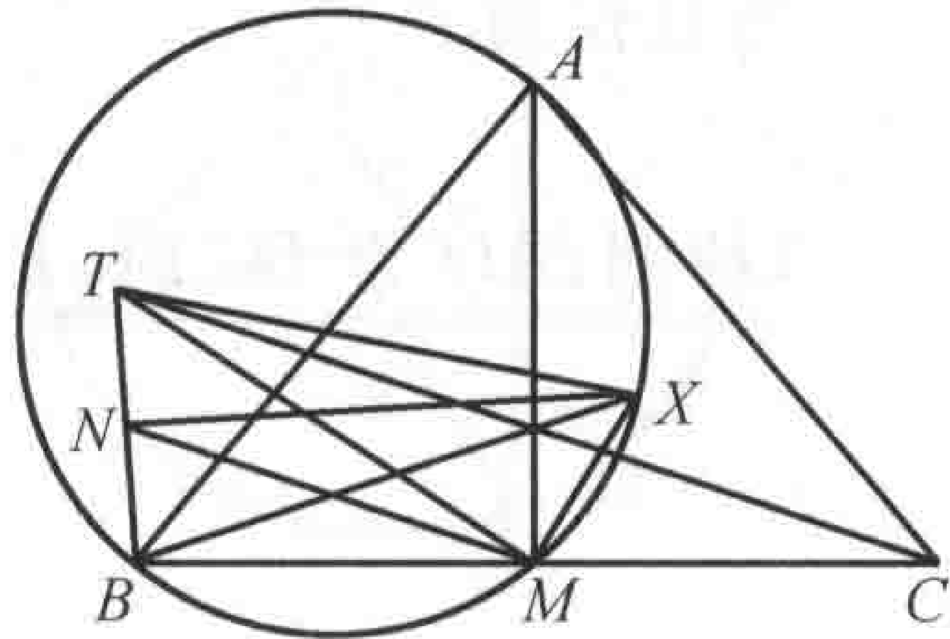


图 48.10

证明 设 N 是 BT 的中点,则 XN 是等腰三角形 BXT 的对称轴,MN 为 $\triangle BCT$ 的中位线.由

$$\angle TNX = \angle TMX = 90^\circ$$

T, N, M, X 共圆. 于是

$$\angle CTM = \angle TMN = \angle TXN = \angle NXB$$

$$\angle MTB = \angle MXN$$

$$\angle MTB - \angle CTM = \angle MXN - \angle NXB =$$

$$\angle BXM = \angle BAM = \frac{1}{2}\angle ABC$$

为定值.

3 梯形 $ABCD$ 的两对角线交于点 P. 点 Q 在平行线 BC 与 AD 之间, $\angle AQD = \angle CQB$, 且 P 与 Q 在直线 CD 的不同侧. 求证: $\angle BQP = \angle DAQ$(图 48.11).

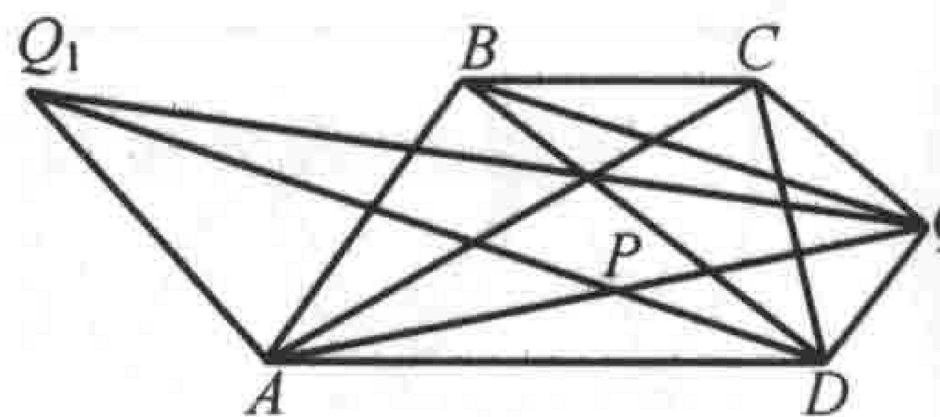


图 48.11

证明 以 P 为中心作相似比为 $\frac{AD}{BC}$ 的反向位似 f, 则

$$f(B) = D, f(C) = A$$

设

$$f(Q) = Q_1$$

则 Q, P, Q_1 共线, 且位于带域 $AD - BC$ 中. 由

$$\triangle AQ_1D \backsim \triangle CQB$$

$$\angle AQ_1D = \angle CQB = \angle AQD$$

故 A, D, Q, Q_1 共圆

$$\angle DAQ = \angle DQ_1Q$$

又因

$$DQ_1 \parallel BQ$$

故

$$\angle DQ_1Q = \angle BQP$$

注 一般(图 48.12), 设任意四边形 $ABCD$ 中

$$AC \cap BD = P, AD \cap BC = I$$

Q 是不与 $\{A, B, C, D\}$ 中任两点共线的任一点. 则有向角

$$\angle AQD = \angle CQB$$

当且仅当

$$\angle BQP = \angle IQA$$

(特别, $AD \parallel BC$ 时, I 是无穷远点, $\angle IQA = \angle DAQ$).

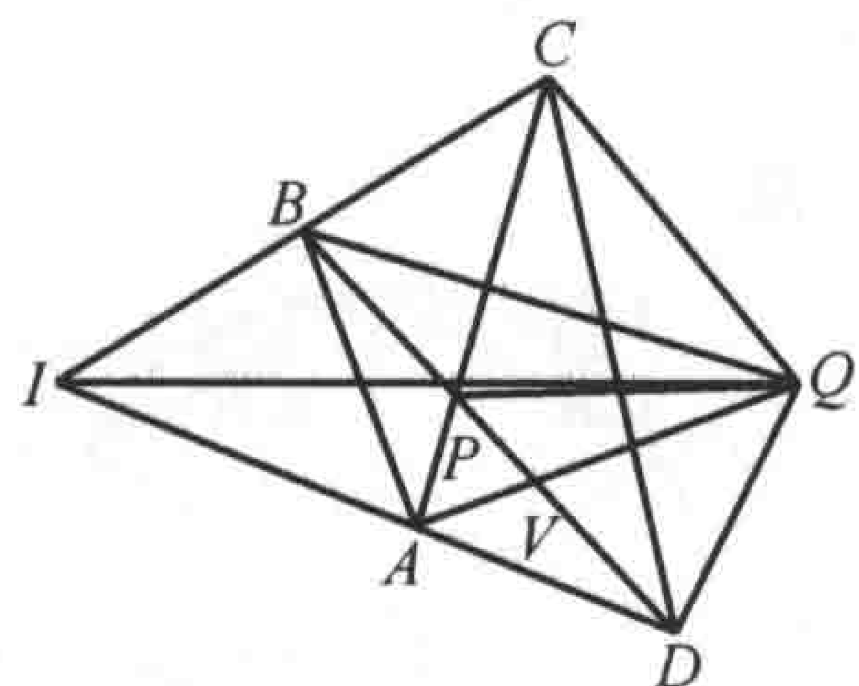


图 48.12

4 设有五点 A,B,C,D,E，$ABCD$ 为平行四边形，而 $BCED$ 为圆内接四边形. 过 A 的直线 L 分别与线段 DC 及直线 BC 交于点 F,G，$EF=EG=EC$. 求证：L 是 $\angle DAB$ 的平分线(图 48.13).

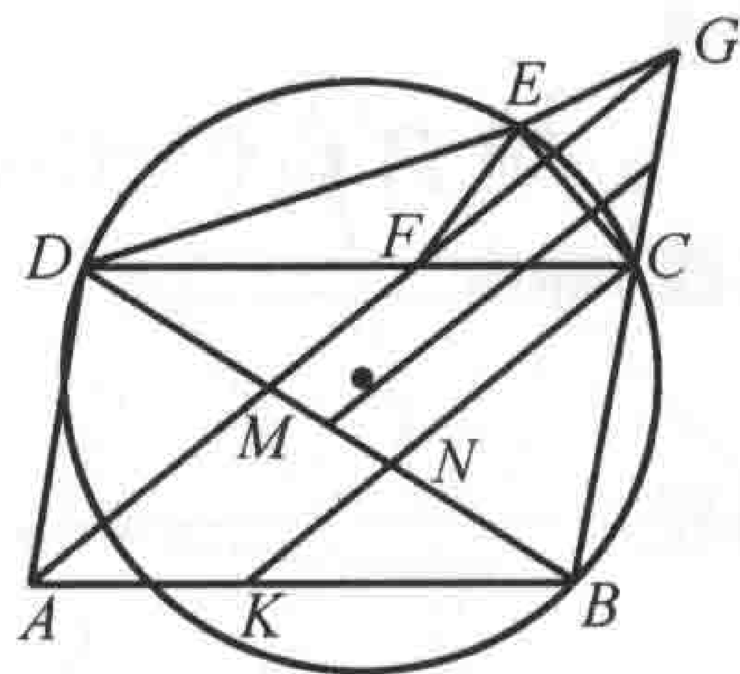


图 48.13

证明 E 在 $\triangle BCD$ 的外接圆周上，由西姆森(Simson)定理，E 到直线 BC,CD,BD 的垂足共线. 由于

$$EF=EG=EC$$

故 CG 的中点，CF 的中点及 E 到 BD 的垂足共线.

过 C 作 L 的平行线交 BD 于 N，设 L 交 BD 于 M，由

$$\triangle ADM \cong \triangle CBN$$

得到

$$DM=BN$$

由平行截线性质，CG 与 CF 的中点连线过 MN 的中点，因此 E 到 BD 的垂足是 BD 的中点，即

$$EB=ED$$

故

$$\angle ECD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DE}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DECB}=\frac{1}{2}\angle GCD$$

等腰三角形 EFC 与 ECG 的腰及底角对应相等，故全等. 因此

$$CF=CG$$

最后，由

$$\triangle ADF \backsim \triangle GCF$$

得到

$$AD=AF$$

从而

$$\angle DAF=\angle DFA=\angle FAB$$

即 L 是 $\angle DAB$ 的平分线.

5 给定 $\triangle ABC$，A_1,B_1,C_1 分别是边 BC,CA,AB 的中点. P 是外接圆周上的动点. 直线 PA_1,PB_1,PC_1 分别与外接圆周交于另一点 A_2,B_2,C_2. 设 A,B,C,A_2,B_2,C_2 互不重合且直线 AA_2,BB_2,CC_2 交成三角形. 求证：这个三角形的面积与 P 的位置无关(图 48.14).

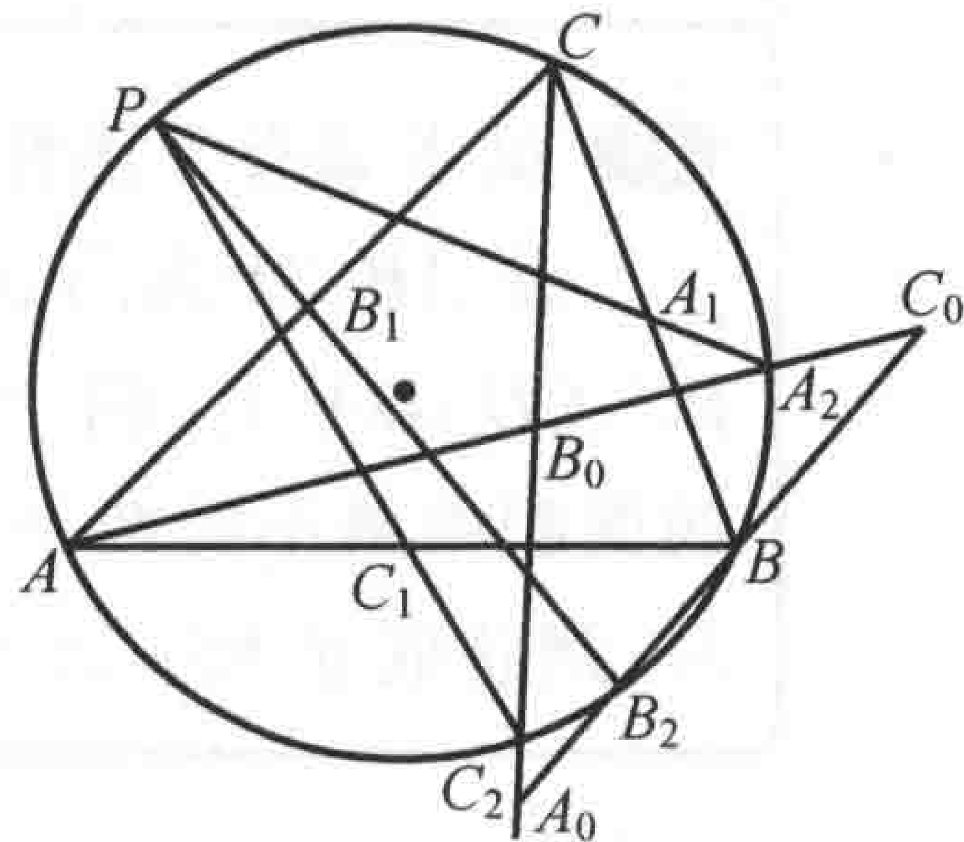


图 48.14

证明 记

$$AA_2 \cap BB_2=C_0, BB_2 \cap CC_2=A_0, CC_2 \cap AA_2=B_0$$

由帕斯卡(Pascal)定理，循环六边形 $ABCC_2PA_2$ 三对对边的

交点

$$AB \cap C_2P = C_1, BC \cap PA_2 = A_1, CC_2 \cap A_2A = B_0$$

共线,即有

$$B_0 \in C_1A_1$$

同理

$$C_0 \in A_1B_1, A_0 \in B_1C_1$$

由中位线

$$C_1A_1 \parallel CA$$

得到

$$\frac{B_0C_0}{AC_0} = \frac{A_1C_0}{B_1C_0}$$

由

$$B_1C_1 \parallel BC$$

得到

$$\frac{A_1C_0}{B_1C_0} = \frac{BC_0}{A_0C_0}$$

因此有

$$A_0C_0 \cdot B_0C_0 = AC_0 \cdot BC_0$$

$$S_{A_0B_0C_0} = \frac{1}{2}A_0C_0 \cdot B_0C_0 \sin\angle AC_0A_0 =$$

$$\frac{1}{2}AC_0 \cdot BC_0 \sin\angle AC_0A_0 =$$

$$S_{ABC_0} = S_{ABA_1} = \frac{1}{2}S_{ABC}$$

为定值.

注 由上述比例得到

$$AA_0 \parallel BB_0 \parallel CC_0$$

(P 的等角共轭点是无穷远点). 设 Q 为 P 的对径点,它们也平行于 Q 的西姆森线.

另外,若 $A_2 = A$,取 AA_2 为 A 处的切线,结论仍成立.

6 试求具有下述性质的最小正数 k:

设 $ABCD$ 为凸四边形,点 A_1, B_1, C_1, D_1 分别在边 AB, BC, CD, DA 上. 四个三角形 AA_1D_1, BB_1A_1, CC_1B_1, DD_1C_1 的面积中最小的两个之和为 S,四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积为 S_1. 则总成立 $kS_1 \geqslant S$(图 48.15).

解 设 $\triangle ABC$ 面积为 1,D 在中线 AM 延长线上. A_1, B_1 分别为中点. $S_{BB_1A_1} = \frac{1}{4}$. 且当 D, C_1, D_1 趋于 M 时,$S_{AA_1D_1}$,$S_{CC_1B_1}$,

$S_{A_1B_1C_1D_1}$ 各趋于$\frac{1}{4}$，$S_{DD_1C_1}$ 趋于0，故S及S_1均趋于$\frac{1}{4}$. 因此$k\geqslant 1$. 下面证明恒有 $S_1 \geqslant S$，从而所求的最小 $k=1$.

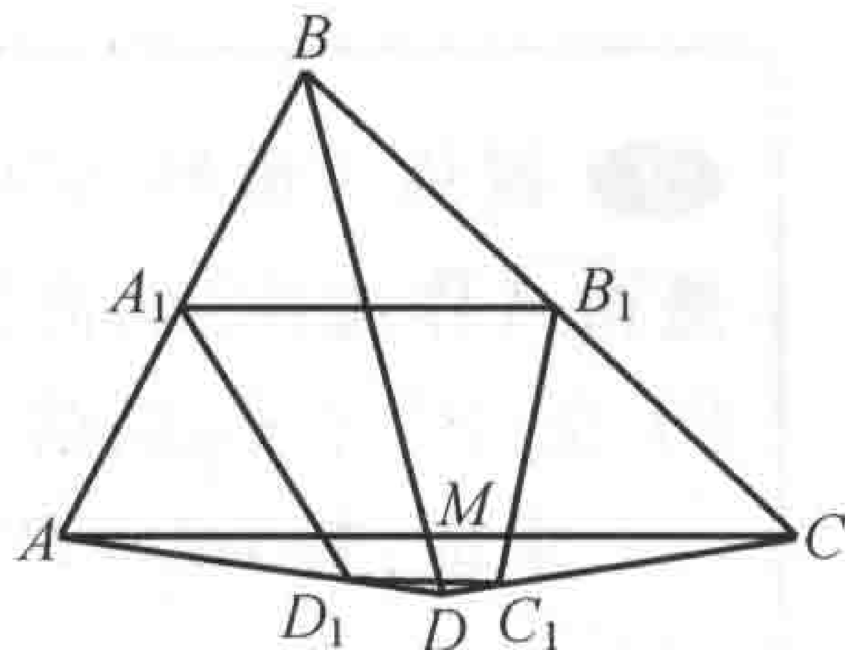


图 48.15

引理 设点U,V,W分别在$\triangle XYZ$的边YZ,ZX,XY上(图 48.16)，则

$$S_{UVW}\geqslant \min\{S_{XVW},S_{YWU},S_{ZUV}\}$$

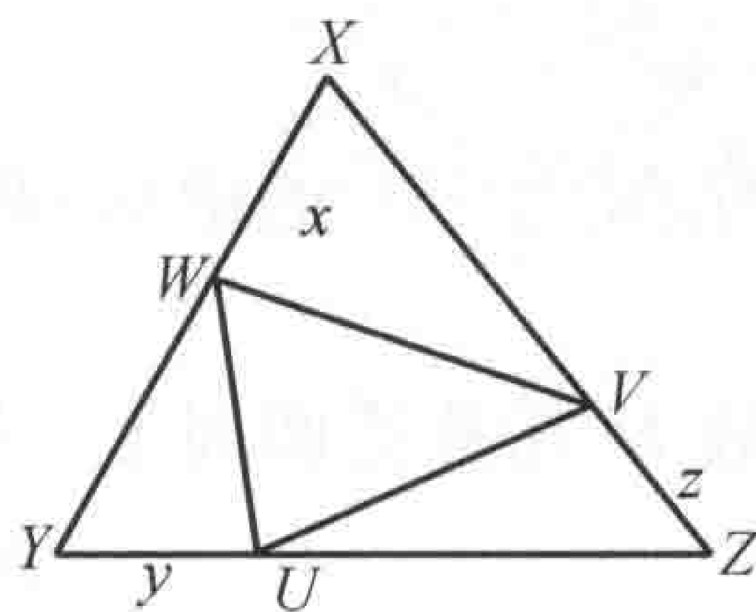


图 48.16

引理的证明 不妨设 $S_{XYZ}=1$，令

$$\frac{XW}{XY}=x,\frac{YU}{YZ}=y,\frac{ZV}{ZX}=z$$

则

$$S_{XVW}=x(1-z),S_{YWU}=y(1-x),S_{ZUV}=z(1-y)$$

$$S_{UVW}=1-x(1-z)-y(1-x)-z(1-y)=$$
$$(1-x)(1-y)(1-z)+xyz\geqslant$$
$$2\sqrt{S_{XVW}S_{YWU}S_{ZUV}}$$

反设

$$S_{UVW}<\min\{S_{XVW},S_{YWU},S_{ZUV}\}$$

则 S_{XVW},S_{YWU},S_{SUV} 的最大者大于$\frac{1}{4}$，于是

$$2\sqrt{S_{XVW}S_{YWU}S_{ZUV}}>2\sqrt{\frac{1}{4}S_{UVW}S_{UVW}}=S_{UVW}$$

矛盾.

回到本题.

若

$$S_{A_1B_1C_1}\geqslant \min\{S_{BB_1A_1},S_{CC_1B_1}\}$$

就称 $A_1B_1C_1$ 为“好的”. 对 $B_1C_1D_1$，$C_1D_1A_1$，$D_1A_1B_1$ 类似定义.

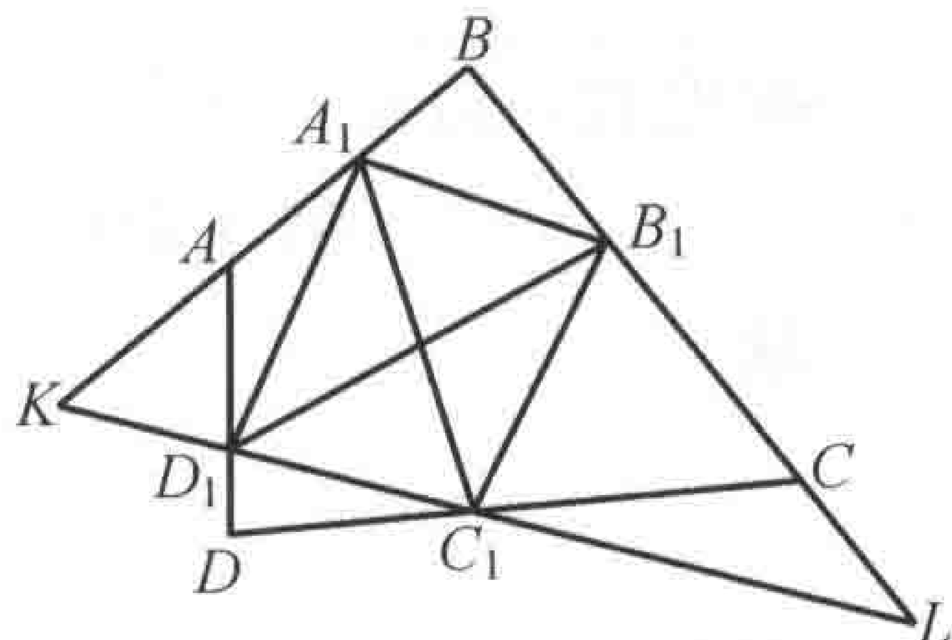


图 48.17

若 $A_1B_1C_1$ 与 $C_1D_1A_1$(或 $B_1C_1D_1$ 与 $D_1A_1B_1$)同为好的，则

$$S_1\geqslant S$$

否则不妨设 $A_1B_1C_1$ 与 $D_1A_1B_1$ 均不好，且

$$S_{A_1B_1C_1}\leqslant S_{D_1A_1B_1}$$

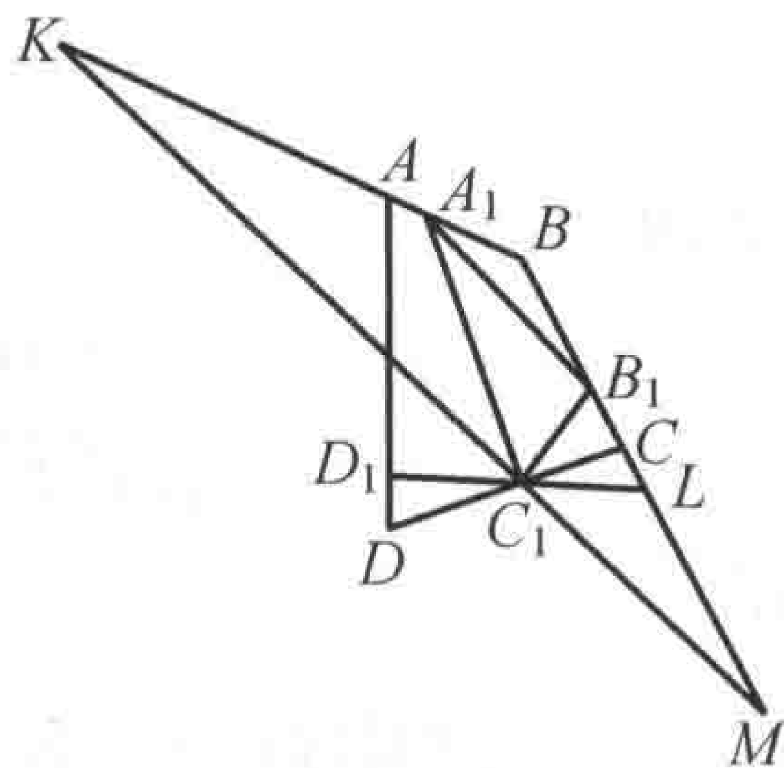


图 48.18

此时射线 D_1C_1 与 BC 必相交于 L，而射线 C_1D_1 与 BA 有两种可能：

(1) 相交于 K. 此时 $\triangle BKL$ 的内接三角形 $A_1B_1C_1$ 的面积比周围三个都小，与引理矛盾(图 48.17).

(2) 不相交. 此时可在 BA 的延长线上取 K，使

$$S_{KA_1C_1}>S_{A_1B_1C_1}$$

且射线 KC_1 与 BC 交于 M. 由于射线 C_1D_1 与 BA 不相交，A 与 D_1 在 KM 的异侧，故 A 与 D 在 KM 的异侧，从而 A,B,C 在 KM 的同侧. 于是 $\triangle BKM$ 的内接三角形 $A_1B_1C_1$ 的面积比周围三个都小，也矛盾(图 48.18).

7 锐角三角形 ABC 中，$\angle B > \angle C$. I 为内心，R 为外径. D 是由 A 作边 BC 的高的垂足. 延长 AD 到 K，使 $AK = 2R$. 延长 DI 交 AC 于 E，联结 K，I 交 BC 于 F（图 48.19）.

求证：若 $IE = IF$，则 $\angle B \leqslant 3\angle C$.

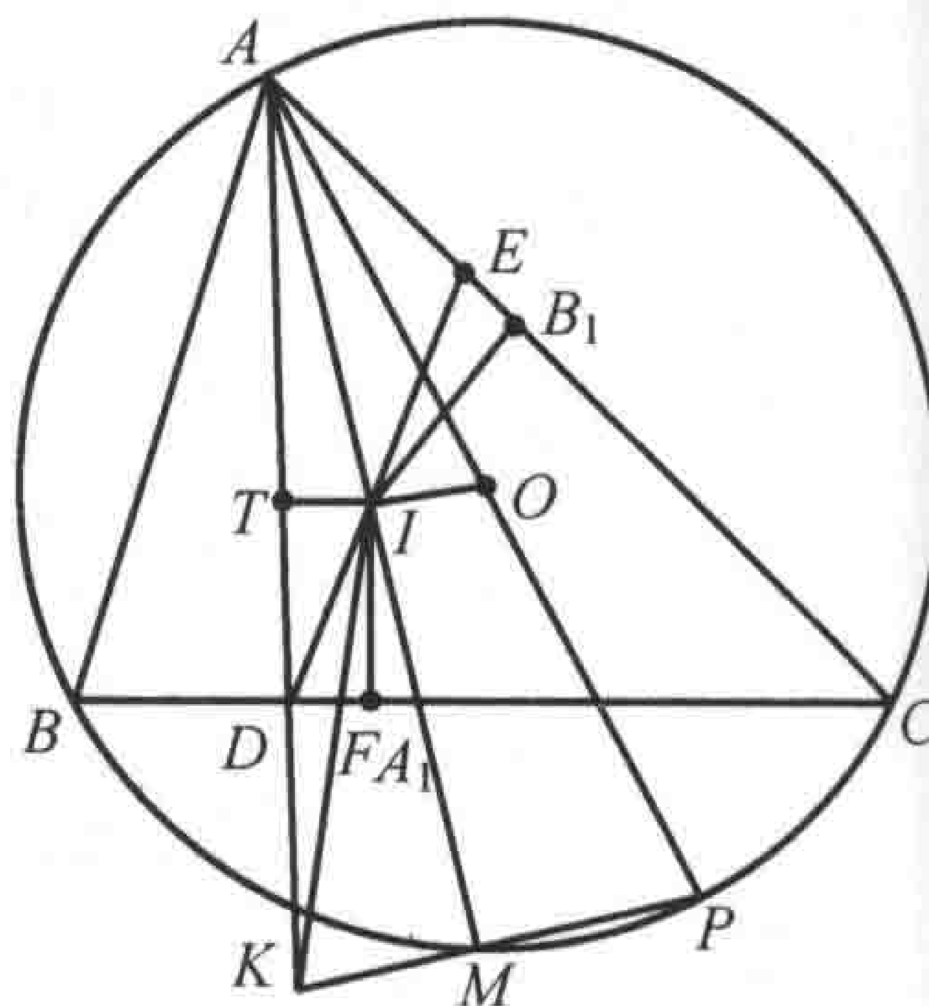


图 48.19

证明 设 P 为 A 的对径点，则

$$AK = AP = 2R$$

令 M 为 PK 的中点，则

$$AM \perp PK$$

故 M 在外接圆周上，且 AM 平分 $\angle PAK$. 由于

$$\angle BAD = 90° - \angle B = PAC$$

故 AM 也平分 $\angle BAC$，$I \in AM$. 作 $IT \perp AD$ 于 T，则

$$DT = r$$

由

$$\triangle AIT \backsim \triangle AKM, \frac{IT}{KM} = \frac{AI}{AK}$$

由欧拉（Euler）公式

$$AI \cdot IM = R^2 - IO^2 = 2Rr = DT \cdot AK$$

故

$$\frac{IT}{KM} = \frac{DT}{IM}$$

于是

$$\triangle DIT \backsim \triangle IKM$$
$$\angle IDT = \angle KIM$$

又因

$$\angle IDT = \angle KID + \angle DKI$$
$$\angle KIM = \angle DKI + \angle KAI$$

故

$$\angle KID = \angle KAI = \frac{\angle A}{2} - (90° - \angle B) = \frac{B - C}{2}$$

现在由于

$$\angle IFC = \angle KFD < 90°$$

故内切圆与 BC 边的切点 A_1 在 F 与 C 之间. 由于

$$IE = IF, \triangle IFA_1 \cong \triangle IEB_1, \angle A_1IF = \angle B_1IE$$

若 B_1 在 A 与 E 之间

$$\angle KID = 180° - \angle EIF = 180° - \angle A_1IB_1 = \angle C$$
$$B = 3C$$

若 B_1 在 C 与 E 之间

$$\angle KID = 180° - \angle EIF < 180° - \angle A_1 IB_1 = \angle C$$
$$B = 3C$$

8 点 P 在凸四边形 $ABCD$ 的边 AB 上. 设 ω 是 $\triangle CPD$ 的内切圆, I 为圆心. ω 分别与三角形 APD, BPC 的内切圆切于 K, L. 对角线 $AC \cap BD = E$, 直线 $AK \cap BL = F$. 求证, E, I, F 共线.

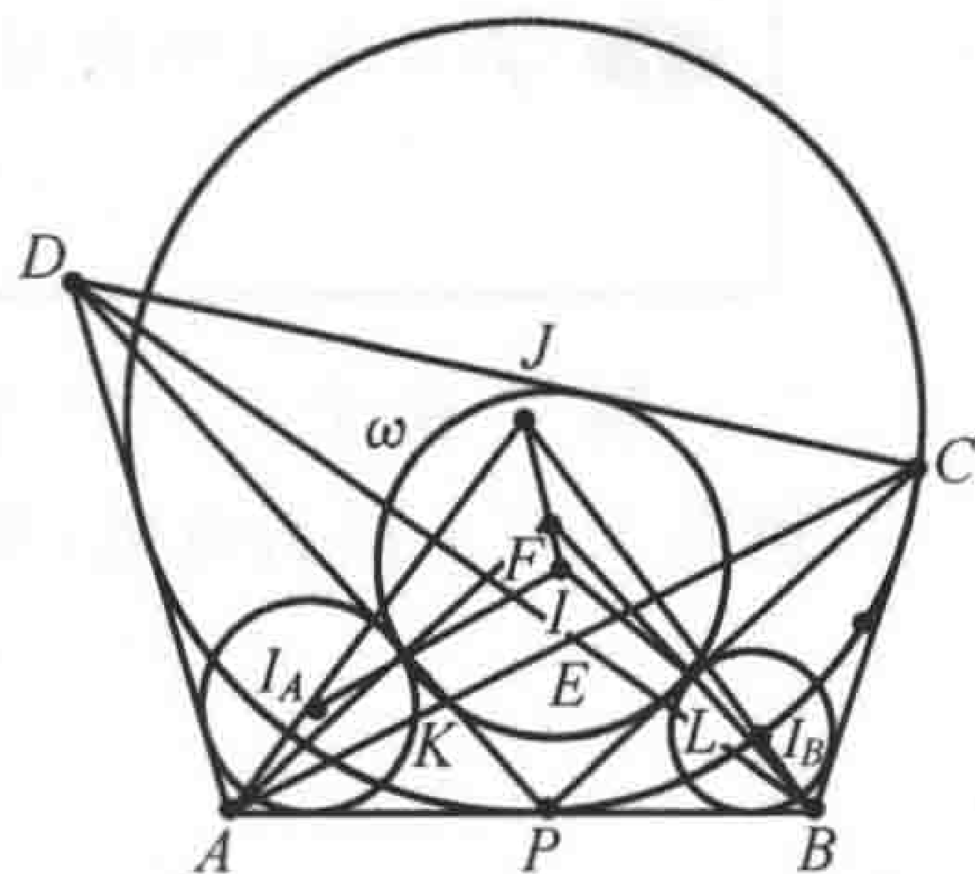


图 48.20

证明 先来证明一个引理.

引理 设有三个圆 (O_1, r_1), (O_2, r_2), (O_3, r_3), S_{12}, S_{23}, S_{31} 分别是它们的位似中心, 则当其中 1 个或 3 个为同向位似中心时, S_{12}, S_{23}, S_{31} 共线.

引理的证明 S_{ij} 与 O_i, O_j 共线, 且当 S_{12} 为反向, 同向时分别有

$$\frac{O_i S_{ij}}{S_{ij} O_j} = \pm \frac{r_i}{r_j}$$

故当同向中心的个数为奇数时, 由门内劳斯(Menelaus) 定理, S_{12}, S_{23}, S_{31} 共线.

设三角形 ADP, BCP 的内切圆为 $\omega_A(I_A)$, $\omega_B(I_B)$, 有

$$AI_A \cap BI_B = J$$

与 DA, AB, BC 相切的圆为 $\Omega(J)$. 由于反向位似 $\omega \leftrightarrow \Omega$ 的中心 $M \in IJ$, 反向位似 $\omega \leftrightarrow \omega_A$ 中心为 K, 同向位似 $\omega_A \leftrightarrow \Omega$ 中心为 A. 由引理

$$M = AK \cap IJ$$

同理

$$M = BL \cap IJ$$

故

$$F = AK \cap BL = M \in IJ$$

由切线长相加得到

$$AD + PC = AP + CD$$

故四边形 $APCD$ 有内切圆 Ω_A. 三个同向位似 $\omega \leftrightarrow \Omega$ 的中心 $N \in IJ$, $\omega \leftrightarrow \Omega_A$ 中心为 C, $\Omega_A \leftrightarrow \Omega$ 中心为 A. 故

$$N = AC \cap IJ$$

再由四边形 $PBCD$, 同理得

$$N = BD \cap IJ$$

因此

$$E = AC \cap BD = N \in IJ$$

数论部分

1 求所有正整数对(k,n),使得

$$(7^k-3^n)\mid(k^4+n^2)$$

解 由于7^k-3^n为偶数,故k^4+n^2也是偶数,k与n同奇偶.但若k与n同为奇数,则

$$k^4+n^2\equiv 1+1=2(\bmod 4)$$

而

$$7^k-3^n\equiv 3-3=0(\bmod 4)$$

矛盾.故k与n同为偶数.

令

$$k=2a,n=2b$$

则

$$7^k-3^n=(7^a-3^b)(7^a+3^b)$$

由于

$$2\mid(7^a-3^b)$$

故

$$2(7^a+3^b)\mid(16a^4+4b^2)$$

因此应有

$$7^a+3^b\leqslant 8a^4+2b^2$$

归纳可证$3^b>2b^2(b\in\mathbf{N}^*)$,$a\geqslant 4$时,$7^a>8a^4$.因此$a\leqslant 3$.

(1)$a=1,k=2$. $3^b\leqslant 2b^2+1$.但$b\geqslant 3$时

$$3^b>2b^2+1$$

故$b=1$或2.验算

$$(7-3^b)(7+3^b)\mid(16+4b^2)$$

得到

$$b=2,n=4$$

(2)$a=2,k=4$. $256+4b^2\geqslant|49-3^b|(49+3^b)\geqslant 22(49+3^b)$,无解.

(3)$a=3,k=6$. $1296+4b^2\geqslant|343-3^b|(343+3^b)\geqslant 100\cdot(343+3^b)$,无解.

故只有一组解

$$(k,n)=(2,4)$$

2 设整数$b,n>1$.已知对每个整数$k>1$,存在$a_k\in\mathbf{Z}$,使得$k\mid(b-a_k^n)$.求证

$$b=A^n,A\in\mathbf{Z}$$

证明 设 b 的标准分解式为 $\sum_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$，只要证明 $n \mid \alpha_i (1 \leqslant i \leqslant r)$.

取 $k = b^2$，对每个 $1 \leqslant i \leqslant r$，设 $\alpha_{p_i}(a_k) = \beta_i$，则

$$\alpha_{p_i}(a_k^n) = n\beta_i$$

由

$$k \mid (b - a_k^n)$$

得

$$\alpha_{p_i}(b - a_k^n) \geqslant 2\alpha_i > \alpha_i = \alpha_{p_i}(b)$$

故必 $\alpha_i = n\beta_i$（否则 $\alpha_{p_i}(b - a_k^n) = \min(\alpha_{p_i}(b), \alpha_{p_i}(a_k^n) \leqslant \alpha_i)$）.

注 若条件“对每个 k”减弱为“有无穷多个 k”，结论不成立. 例如，$b = 16, n = 8$ 时，对每个素数 p，同余方程

$$x^8 - 16 = (x^2 - 2)(x^2 + 2)(x^2 - 2x + 2) \cdot (x^2 + 2x + 2) \equiv 0 \pmod p$$

都有解（$p = 2$ 时，显然. 当 $p \equiv 1 \pmod 4$ 时

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$$

有解. 当 $p \equiv 3 \pmod 4$ 时，由于

$$\left(\frac{-2}{p}\right) = -\left(\frac{2}{p}\right)$$

故

$$x^2 \equiv 2, -2 \pmod p$$

中一个有解），但 16 不是 8 次方数.

3 设 X 是 10 000 个整数的集合，每个元素均不被 47 整除. 求证：存在 X 的 2 007 元子集 Y，对任意 $a, b, c, d, e \in Y$，$a - b + c - d + e$ 皆不被 47 整除.

证明 称满足题给条件的集合为好集. 则

$$I = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9\}$$

是好集（I 中任意 5 个元素之和是绝对值不大于 45 的奇数）. 对每个 $k \in \{1, 2, \cdots, 46\}$，$X$ 的子集

$$A_k = \{x \in X \mid i \in I, kx \equiv i \pmod 7\}$$

是个好集.

每个 $x \in X$ 恰属于 10 个 A_k，故

$$\sum_{k=1}^{46} |A_k| = 10 |X| = 100\ 000$$

因此必有一个

$$|A_k| \geqslant \left|\frac{100\ 000}{46}\right| = 2\ 174$$

注 (Cauchy-Davenport)：p 为素数，$A,B\subseteq Z_p$. 则

$$|A+B|\geqslant \min\{p, |A|+|B|-1\}$$

当

$$|A|, |B|\geqslant 2, |A+B|=|A|+|B|-1\leqslant p$$

时，A,B 为同公差的等差数列.

设好子集 $Y(\bmod 47)$ 的余数集为 K，题给条件等价于

$$0\notin K+K+K+(-K)+(-K)$$

故应有

$$|K|\leqslant 10$$

且若 $|K|=10$，K 为等差，可设

$$K=d(x+\{0,1,\cdots,9\})$$

此时

$$K+K+K+(-K)+(-K)=$$
$$d(x+\{-18,-17,\cdots,0,1,\cdots,27\})$$

必 $x=19$.

即

$$K=d\{19,20,21,22,23,24,25,26,27,28\}=aI$$

由此可得，若 $|X|=46m$，且 X 中元素 $(\bmod 47)$ 的每种余数各 m 个，则好子集的元素个数最大值为 $10m$.

4 对于整数 $k\geqslant 2$，证明 $C_{2^{k+1}}^{2^k}-C_{2^k}^{2^{k-1}}$ 被 2^{3k} 整除，但不被 2^{3k+1} 整除.

证明 利用

$$C_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{2^n(2n-1)!!}{n!}=\frac{2^{2n}((2n-1)!!)^2}{(2n)!}$$

$$C_{2^{k+1}}^{2^k}-C_{2^k}^{2^{k-1}}=\frac{2^{2^k}(2^{k+1}-1)!!}{(2^k)!}-\frac{2^{2^k}((2^k-1)!!)^2}{(2^k)!}=$$
$$\frac{2^{2^k}(2^k-1)!!}{(2^k)!}\left(\prod_{i=1}^{2^{k-1}}(2^k+2i-1)-\prod_{i=1}^{2^{k-1}}(2^k-(2i-1))\right)$$

$$\prod_{i=1}^{2^{k-1}}(2^k+2i-1)-\prod_{i=1}^{2^{k-1}}(2^k-(2i-1))=$$
$$\sum_{r=1}^{2^{k-2}}2^{(2r-1)k+1}S_{2^{k-1}-(2r-1)}\equiv$$
$$2^{k+1}(2^k-1)!!\sum_{i=1}^{2^{k-1}}\frac{1}{2i-1}(\bmod 2^{3k+1})$$

$$\sum_{i=1}^{2^{k-1}}\frac{1}{2i-1}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2^{k-1}}\left(\frac{1}{2i-1}+\frac{1}{2^k-(2i-1)}\right)=$$
$$2^{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-1}}\frac{1}{(2i-1)(2^k-(2i-1))}$$

$A=\{1,3,\cdots,2^k-1\}$ 是 $(\bmod 2^k)$ 的缩系，故 $r^{-2}(r\in A)$ 是 $r^2(r\in A)$ 的置换，因此

$$\sum_{r\in A}\frac{1}{r(2^k-r)}\equiv-\sum_{r\in A}\frac{1}{r^2}\equiv-\sum_{r\in A}r^2=$$
$$-\sum_{i=1}^{2^{k-1}}(4i(i-1)+1)\equiv 2^{k-1}(\bmod 2^k)$$

由于

$$\alpha_2((2^k)!)=\frac{2^k-1}{2-1}=2^k-1$$

故

$$a_2(C_{2^{k+1}}^{2^k}-C_{2^k}^{2^{k-1}})=2^k-(2^k-1)+k+1+2(k-1)=3k$$

5 求所有满射函数 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$，使得对任意 $m,n\in\mathbf{N}^*$ 和任意素数 p，均有 $p\mid f(m+n)$ 当且仅当 $p\mid(f(m)+f(n))$.

解　先来证明一个引理.

引理　对于素数 p 以及 $x,y\in\mathbf{N}^*$，$x\equiv y(\bmod p)$ 当且仅当

$$f(x)\equiv f(y)(\bmod p)$$

$p\mid f(x)$ 当且仅当

$$p\mid x$$

引理的证明　由满射性，存在 $a\in\mathbf{N}^*$，使得

$$p\mid f(a)$$

令

$$d=\min\{a\in\mathbf{N}^*\mid p\mid f(a)\}$$

由已知条件，对任意 $k\in\mathbf{N}^*$，$p\mid f(kd)$. 若有 $x\in\mathbf{N}^*$，$d\nmid x$，$p\mid f(x)$，记

$$y=\min\{x\in\mathbf{N}^*\mid d\nmid x,p\mid f(x)\}$$

则 $y>d$. 由于

$$d\nmid(y-d)$$

且

$$0<y-d<y$$

故

$$p\nmid f(y-d)$$

但由已知条件及 $p\mid f(d)$，得到

$$p\nmid f(y)$$

矛盾.因此 $p \mid f(x)$ 当且仅当 $d \mid x$.

若

$$x \equiv y(\bmod d)$$

由 d 整除$(x+2dx-x)$及$(y+2dx-x)$,推出 p 整除$(f(x)+f(2dx-x))$及$(f(y)+f(2dx-x))$,故

$$f(x) \equiv f(y)(\bmod p)$$

另一方面,若

$$f(x) \equiv f(y)(\bmod p)$$

由 p 整除$(f(x)+f(2dx-x))$及$(f(y)-f(x))$,推出

$$p \mid (f(y)+f(2dx-x))$$

故

$$d \mid (y+2dx-x)$$

即

$$x \equiv y(\bmod d)$$

因此

$$x \equiv y(\bmod d)$$

当且仅当

$$f(x) \equiv f(y)(\bmod p)$$

现在由于 $f(1),f(2),\cdots,f(d)(\bmod p)$ 互不同余,故 $d \leqslant p$.又由满射性 $d \geqslant p$,故 $d=p$.引理证毕.

最后归纳证明 $f(n)=n$. $n=1$ 时,由于 $f(1)$ 不被任一素数整除,故 $f(1)=1$.对 $n>1$,设 $f(n)=k$.对 n 的任一素因子 p,均有 $p \mid k$,故 $k>1$.

若 $k>n, k-n+1>1$,设 p 是 $k-n+1$ 的一个素因子,则 $k \equiv n-1(\bmod p)$.由归纳假设

$$f(n)=k \equiv n-1=f(n-1)(\bmod p)$$

故

$$n \equiv n-1(\bmod p)$$

矛盾.

若

$$k<n, n-k+1>1$$

设 p 是 $n-k+1$ 的一个素因子,则

$$n \equiv k-1(\bmod p)$$

由引理及归纳假设

$$k=f(n) \equiv f(k-1)=k-1(\bmod p)$$

也矛盾.

故唯一的解是

$$f(n)=n$$

6 $k\in\mathbf{N}^*$. 求证:当且仅当 k 为偶数时,$(4k^2-1)^2$ 有 $8kn-1$ 型正因数.

证明 先来证明一个引理.

引理 对于 $x,y\in\mathbf{N}^*$,$(4xy-1)\mid(4x^2-1)$ 当且仅当 $x=y$.

引理的证明

$$(4x^2-1)^2y^2=(x(4xy-1)+x-y)^2=$$
$$x^2(4xy-1)^2+2x(x-y)(4xy-1)+(x-y)^2$$

故由

$$(4xy-1)\mid(4x^2-1)^2$$

推出

$$(4xy-1)\mid(x-y)^2$$

反设有正整数 $x\neq y$,满足

$$(4xy-1)\mid(x-y)^2$$

则必有一组这样的(x,y),使 $x+y$ 为最小. 令

$$(x-y)^2=m(4xy-1)$$

不妨设 $x>y$. 二次方程

$$u^2-(4m+2)yu+y^2+m=0$$

的一个根 $u_1=x$,另一根

$$u_2=(4m+2)y-x=\frac{y^2+m}{x}$$

也是正整数. 故(u_2,y)也满足条件. 由所设 $x+y$ 最小,得到 $u_2\geqslant x$,即

$$k\geqslant x^2-y^2$$

于是

$$(x-y)^2\geqslant(x^2-y^2)(4xy-1)$$

即

$$x-y\geqslant(x+y)(4xy-1)$$

矛盾.

回到本题,即

$$x=k,y=2n$$

由

$$(4xy-1)\mid(4x^2-1)$$

推出 $x=y$,即

$$k=2n$$

7 对于素数 p 和正整数 n，设 $v_p(n)$ 是 $n!$ 的标准分解式中 p 的方次. 给定 $d\in\mathbf{N}^*$ 和素数有限集 $\{p_1,\cdots,p_k\}$. 求证：存在无穷多个 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $d\mid v_{p_i}(n)(1\leqslant i\leqslant k)$.

证明 先来证明一个引理.

引理 设 p 为素数，$q,k,r\in\mathbf{N}^*$，$p^k>r$. 则

$$v_p(qp^k+r)=v_p(qp^k)+v_p(r)$$

事实上，由公式

$$v_p(n)=\frac{n-S_p(n)}{p-1}$$

及

$$S_p(qp^k+r)=S_p(qp^k)+S_p(r)$$

即得.

对 $n\in\mathbf{N}^*$，令

$$f(n)=(f_1(n),\cdots,f_k(n))$$

其中 $f_i(n)$ 是 $v_{p_i}(n)(\bmod d)$ 的余数. 显然

$$S=\{f(n)\mid n\in\mathbf{N}^*\}$$

是个有限集. 定义严格递增数列 (n_j)

$$n_1=1,n_{j+1}=(p_1\cdots p_k)^{n_j}$$

归纳证明对任意 $j_1<j_2<\cdots<j_m$，有

$$f(\sum_{i=1}^m n_{j_i})=\sum_{i=1}^m f(n_{j_i})$$

当 $m=1$ 时，显然. 当 $m>1$ 时，对每个 $i(1\leqslant i\leqslant k)$，有

$$p_i^{n_{j_2}}\mid\sum_{s=2}^m n_{j_s},p_i^{n_{j_2}}>n_{j_2}>n_{j_1}$$

由引理及归纳假设，对每个 i，有

$$f_i(\sum_{s=1}^m n_{j_s})=f_i(n_{j_1})+f_i(\sum_{s=2}^m n_{j_s})=\sum_{s=1}^m f_i(n_{j_s})$$

故

$$f(\sum_{s=1}^m n_{j_s})=\sum_{s=1}^m f(n_{j_s})$$

最后，有无穷多个 $j_1<j_2<\cdots$，f 值彼此相同，每相邻 d 个之和的 f 值都是$(0,\cdots,0)$.

第四编
第 49 届国际数学奥林匹克

第 49 届国际数学奥林匹克题解

西班牙,2008

1 已知 H 是锐角三角形 ABC 的垂心,以边 BC 的中点为圆心,过点 H 的圆与直线 BC 相交于两点 A_1,A_2;以边 CA 的中点为圆心,过点 H 的圆与直线 CA 相交于两点 B_1,B_2;以边 AB 的中点为圆心,过点 H 的圆与直线 AB 相交于两点 C_1,C_2.

证明:六点 A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 共圆.

俄罗斯命题

证法 1　B_0,C_0 分别是边 CA,AB 的中点(图 49.1).设以点 B_0 为圆心,过点 H 的圆与以 C_0 为圆心,过点 H 的圆的另一个交点为 A',则

$$A'H \perp C_0B_0$$

由于 B_0,C_0 分别是边 CA,AB 的中点,所以

$$C_0B_0 \parallel BC$$

从而

$$A'H \perp BC$$

于是点 A' 在 AH 上.

由切割线定理

$$AC_1 \cdot AC_2 = AA' \cdot AH = AB_1 \cdot AB_2$$

所以,B_1,B_2,C_1,C_2 四点共圆.

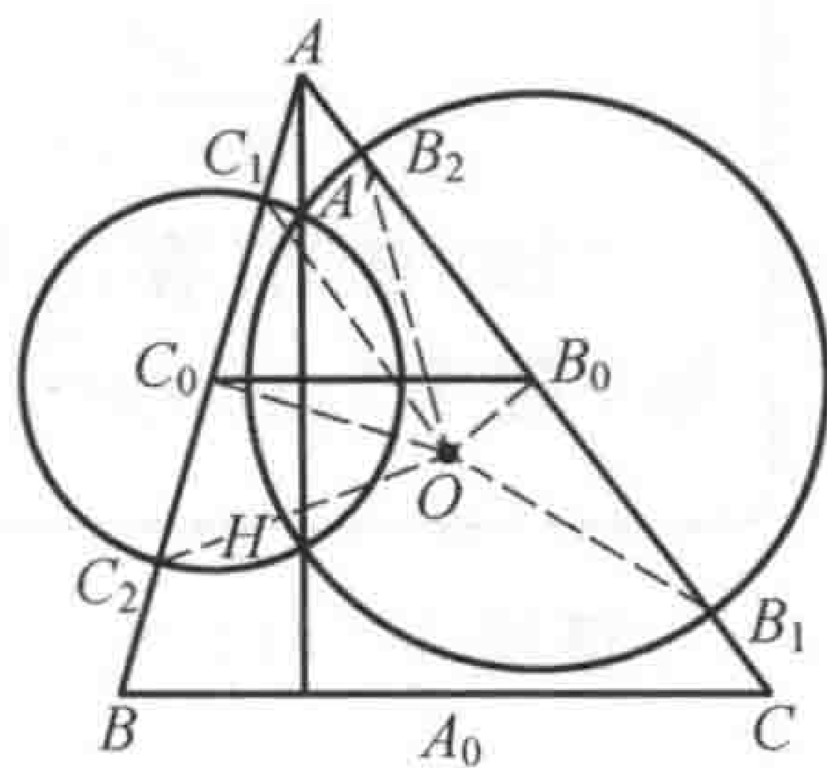


图 49.1

分别作 B_1B_2,C_1C_2 的垂直平分线,设它们相交于点 O,则 O 是四边形 $B_1B_2C_1C_2$ 的外接圆圆心,也是 $\triangle ABC$ 的外心,且

$$OB_1 = OB_2 = OC_1 = OC_2$$

同理可得

$$OA_1 = OA_2 = OB_1 = OB_2$$

所以,A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 六点都是在以 O 为圆心,OA_1 为半径的圆上,故六点 A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 共圆.

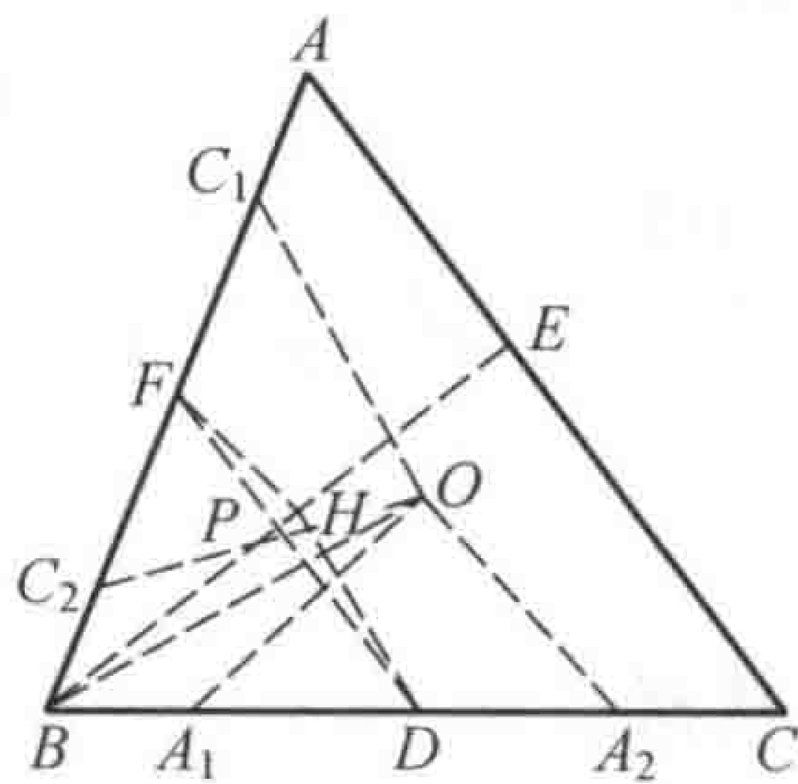


图 49.2

证法 2　设三角形 ABC 的外心为 O,且 D,E,F 分别是边 BC,CA,AB 上的中点(图 49.2),联结 DF,交 BH 于点 P,$BH \perp DF$,于是由勾股定理得

$$BF^2 - FH^2 = BP^2 - PH^2 = BD^2 - DH^2 \quad ①$$

$$BO^2 - A_1O^2 = BD^2 - A_1D^2 = BD^2 - DH^2 \quad ②$$

同理可得

$$BO^2 - C_2O^2 = BF^2 - FH^2 \quad ③$$

所以，由式 ①，②，③ 可得

$$A_1O = C_2O$$

易知

$$A_1O = A_2O, C_1O = C_2O$$

故

$$A_1O = A_2O = C_1O = C_2O$$

同理

$$A_1O = A_2O = B_1O = B_2O$$

所以，六点 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ 在以 O 为圆心的圆上.

2 (1) 设实数 x, y, z 都不等于 1，满足 $xyz = 1$，求证

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1$$

(2) 证明：存在无穷多组三元有理数组 (x, y, z)，x, y, z 都不等于 1，且 $xyz = 1$，使得上述不等式等号成立.

奥地利命题

证法 1 (1) 令

$$\frac{x}{x-1} = a, \frac{y}{y-1} = b, \frac{z}{z-1} = c$$

则

$$x = \frac{a}{a-1}, y = \frac{b}{b-1}, z = \frac{c}{c-1}$$

由题设条件

$$xyz = 1$$

得

$$abc = (a-1)(b-1)(c-1)$$

即

$$a + b + c - 1 = ab + bc + ca$$

所以

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = \\ &(a+b+c)^2 - 2(a+b+c-1) = \\ &(a+b+c-1)^2 + 1 \geqslant 1 \end{aligned}$$

从而

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1$$

（2）令

$$(x,y,z)=\left(-\frac{k}{(k-1)^2},k-k^2,\frac{k-1}{k^2}\right)$$

k 是正整数，则(x,y,z) 是三元有理数组，x,y,z 都不等于 1，且对于不同的正整数 k，三元有理数组(x,y,z) 是互不相同的. 此时

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}=$$

$$\frac{k^2}{(k^2-k+1)^2}+\frac{(k-k^2)^2}{(k^2-k+1)^2}+\frac{(k-1)^2}{(k^2-k+1)^2}=$$

$$\frac{k^4-2k^3+3k^2-2k+1}{(k^2-k+1)^2}=1$$

从而命题得证.

证法 2 （1）由

$$xyz=1$$

可设

$$p=x,q=1,r=\frac{1}{y}$$

得

$$x=\frac{p}{q},y=\frac{q}{r},z=\frac{1}{xy}=\frac{r}{p}$$

p,q,r 互不相等. 故

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geqslant 1\Leftrightarrow$$

$$\frac{p^2}{(p-q)^2}+\frac{q^2}{(q-r)^2}+\frac{r^2}{(r-p)^2}\geqslant 1 \qquad ①$$

令

$$a=\frac{p}{p-q},b=\frac{q}{q-r},c=\frac{r}{r-p}$$

则式 ① 化为

$$\sum a^2\geqslant 1$$

由于

$$\frac{-1+a}{a}=\frac{q}{p},\frac{-1+b}{b}=\frac{r}{q},\frac{-1+c}{c}=\frac{p}{r}$$

所以

$$\frac{-1+a}{a}\cdot\frac{-1+b}{b}\cdot\frac{-1+c}{c}=1$$

$$1-\sum a+\sum ab=0 \qquad ②$$

由式 ② 可得

$$1-\sum a^2=-(a+b+c-1)^2\leqslant 0$$

所以

$$\sum a^2 \geqslant 1$$

从而式 ① 成立.

(2) 令

$$b=\frac{t^2+t}{t^2+t+1}, c=\frac{t+1}{t^2+t+1}, a=-\frac{bc}{b+c}$$

其中 t 可取除 0,-1 外的一切有理数,改变 t,其中使得 b,c,a 中有某个为 1 的,至多只有有限个,这样就得到无穷多组三元有理数组 (a,b,c),a,b,c 都不等于 1,使得

$$\sum a=\sum a^2=1$$

而由

$$(x,y,z)=\left(\frac{a}{a-1},\frac{b}{b-1},\frac{c}{c-1}\right)$$

知第(2) 问成立.

3 证明:存在无穷多个正整数 n,使得 n^2+1 有一个大于 $2n+\sqrt{2}n$ 的质因子.

立陶宛命题

证法 1 设 $m(\geqslant 20)$ 是一个整数,p 是 $(m!)^2+1$ 的一个质因子,则

$$p>m\geqslant 20$$

令整数 n 满足

$$0<n<\frac{p}{2}$$

且

$$n\equiv\pm m!\ (\mathrm{mod}\ p)$$

于是

$$0<n<p-n<p$$

且

$$n^2\equiv -1(\mathrm{mod}\ p) \quad ①$$

故

$$(p-2n)^2=p^2-4pn+4n^2\equiv -4(\mathrm{mod}\ p)$$

所以

$$(p-2n)^2\geqslant p-4$$

$$p\geqslant 2n+\sqrt{p-4}\geqslant 2n+\sqrt{2n+\sqrt{p-4}-4}>2n+\sqrt{2}n \quad ②$$

由式 ①,② 便知,命题成立.

证法 2 首先,若素数

$$p \equiv 1 \pmod 4$$

则

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=1$$

即存在

$$n \in \{1,2,\cdots,p-1\}$$

使得

$$n^2 \equiv -1 \pmod p$$

显然对于上述的 n，有

$$(p-n)^2 \equiv n^2 \equiv -1 \pmod p$$

且

$$\min\{n,p-n\} \leqslant \frac{p-1}{2}$$

所以，存在整数

$$f(p) \in \left\{1,2,\cdots,\frac{p-1}{2}\right\}$$

使得

$$f^2(p) \equiv -1 \pmod p$$

下证：当 p 足够大（$p \geqslant 29$）时，$n=f(p)$ 满足

$$2n+\sqrt{2n} < p \qquad ③$$

若对某个 $p \geqslant 29$，上述结论不成立，则

$$2n+\sqrt{2n} \geqslant p$$

所以

$$(1+2\sqrt{2n})^2 \geqslant 4p+1$$

因此

$$n \geqslant \frac{p-1}{2}-\frac{\sqrt{4p+1}-3}{4}$$

设

$$t=\frac{p-1}{2}-n \in \mathbf{Z}$$

则

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{\sqrt{4p+1}-3}{4}$$

而

$$0 \equiv n^2+1 \equiv \left(\frac{p-1}{2}-t\right)^2+1=$$

$$\frac{p^2-2p+1}{4}+t^2-(p-1)t+1 \equiv$$

$$\frac{3p+5}{4}+t^2+t \pmod p$$

因为

$$4 \mid p-5$$

所以

$$\frac{p^2-2p+1}{4}-\frac{3p+1}{4}=p\cdot\frac{p-5}{4}\equiv 0 \pmod p$$

则

$$p \mid t^2+t+\frac{3p+5}{4}$$

而由

$$0\leqslant t\leqslant\frac{\sqrt{4p+1}-3}{4}$$

知

$$0<t^2+t+\frac{3p+5}{4}\leqslant\left(\frac{\sqrt{4p+1}-3}{4}\right)^2+$$

$$\frac{\sqrt{4p+1}-3}{4}+\frac{3p+5}{4}=$$

$$\frac{8p+9-\sqrt{4p+1}}{8}<p$$

矛盾.

所以,结论 ③ 对足够大的同余 1 模 4 的素数 p 均成立.

下面只需说明 $f(p)$ 的取值有无限多个即可.事实上

$$p \mid f^2(p)+1\Rightarrow f(p)>\sqrt{p-1}$$

当 $p\to\infty$ 时,$f(p)\to\infty$,所以 $f(p)$ 的取值有无限多个.在原命题中,取 $n=f(p)$,p 为相应的素因子即可.

4 求所有的函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$,满足对所有的正实数 $w,x,y,z,wx=yz$,都有

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

韩国命题

解 令

$$w=x=y=z=1$$

得

$$(f(1))^2=f(1)$$

所以

$$f(1)=1$$

对任意 $t>0$,令

$$w=t,x=1,y=z=\sqrt{t}$$

得

$$\frac{(f(t))^2+1}{2f(t)}=\frac{t^2+1}{2t}$$

去分母整理得

$$(tf(t)-1)(f(t)-t)=0$$

所以,对每个 $t>0$,有

$$f(t)=t \text{ 或 } f(t)=\frac{1}{t} \qquad ①$$

若存在 $b,c\in(0,+\infty)$,使得

$$f(b)\neq b,f(c)\neq\frac{1}{c}$$

则由式 ① 知,b,c 都不等于 1,且

$$f(b)=\frac{1}{b},f(c)=c$$

令

$$w=b,x=c,y=z=\sqrt{bc}$$

则

$$\frac{\frac{1}{b^2}+c^2}{2f(bc)}=\frac{b^2+c^2}{2bc}$$

所以

$$f(bc)=\frac{c+b^2c^3}{b(b^2+c^2)}$$

因为

$$f(bc)=bc$$

或者

$$f(bc)=\frac{1}{bc}$$

若

$$f(bc)=bc$$

则

$$bc=\frac{c+b^2c^3}{b(b^2+c^2)}$$

得 $b^4c=c,b=1$,矛盾.若

$$f(bc)=\frac{1}{bc}$$

则

$$\frac{1}{bc}=\frac{c+b^2c^3}{b(b^2+c^2)}$$

得 $b^2c^4=b^2,c=1$,矛盾.

所以,或者

$$f(x)=x,x\in(0,+\infty)$$

或者

$$f(x)=\frac{1}{x},x\in(0,+\infty)$$

经检验

$$f(x)=x,x\in(0,+\infty)$$

和

$$f(x)=\frac{1}{x},x\in(0,+\infty)$$

都满足要求.

5 设 n 和 k 是正整数,$k\geqslant n$,且 $k-n$ 是一个偶数. $2n$ 盏灯依次编号为 $1,2,\cdots,2n$,每一盏灯可以“开”和“关”. 开始时,所有的灯都是“关”的. 对这些灯可进行操作,每一次操作只改变其中的一盏灯的开关状态(即“开”变成“关”,“关”变成“开”),我们考虑长度为 k 的操作序列,序列中的第 i 项就是第 i 次操作时被改变开关状态的那盏灯的编号.

设 N 是 k 次操作后,使得灯 $1,\cdots,n$ 是“开”的,灯 $n+1,\cdots,2n$ 是“关”的状态的所有不同的操作序列的个数.

设 M 是 k 次操作后,使得灯 $1,\cdots,n$ 是“开”的,灯 $n+1,\cdots,2n$ 是“关”的,但是灯 $n+1,\cdots,2n$ 始终没有被开过的所有不同的操作序列的个数.

求比值 $\frac{N}{M}$.

法国命题

解 所求的比值为 2^{k-n}.

引理 设 t 是正整数,如果一个 t 元 0,1 数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_t)$ $(a_1,a_2,\cdots,a_t\in\{0,1\})$ 中共有奇数个 0,那么称其为“好的”. 则好数组共有 2^{t-1} 个.

引理的证明 事实上,对于相同的 $a_1,a_2,\cdots,a_t$,在 a_t 取 0,1 时得到的两个数组中的奇偶性不同,则恰好有一个为“好的”,于是我们可以将总共 2^t 个不同的可能数组两两配对,每对数组仅有 a_t 不同,则每对恰好有一个好数组,故好数组占总体的一半,即有 2^{t-1} 个. 引理得证.

称 k 次操作后,灯 $1,\cdots,n$ 是“开”的,灯 $n+1,\cdots,2n$ 是“关”的状态的操作序列的全体记为 A 类型;k 次操作后,灯 $1,\cdots,n$ 是“开”的,灯 $n+1,\cdots,2n$ 是“关”的,但是灯 $n+1,\cdots,2n$ 始终没有被操作过的操作序列的全体记为 B 类型. 对于任意一个 B 类列 b,将有如下性质的 A 类列 a 全部与它对应:“a 的各元素在模 n 的意义下对应相同”(例如,$n=2,k=4$ 时,$b=(2,2,2,1)$ 可对应如 $a=$

$(4,4,2,1)$，$a=(2,2,2,1)$，$a=(2,4,4,1)$ 等)，那么由于 b 是 B 类列，其中 $1,2,\cdots,n$ 的个数必定全为奇数，而 a 是 A 类列，又要求 a 中 $1,\cdots,n$ 的个数全为奇数，且 $n+1,\cdots,2n$ 的个数全为偶数.

于是对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，设 b 中有 b_i 个 i，则 a 必须且只需满足：对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，b 中是 i 的 b_i 个元所在位上，在 a 中都是 i 或者 $n+i$，且 i 有奇数个(自然 $n+i$ 就有偶数个)，那么由引理及乘法原理，b 恰可对应

$$\prod_{i=1}^{n} 2^{b_i-1}=2^{k-n}$$

个不同的 a，而每个 A 中的元 a 均有 B 中一元(唯一的一个元) b(它是把 a 的各位变成它除以 n 的最小正余数) 可以对应它，从而必有

$$|A|=2^{k-n}|B|$$

即

$$N=2^{k-n}M$$

又易知 $M\neq 0$(因为操作列 $(1,2,\cdots,n,n,\cdots,n)\in B$)，所以

$$\frac{N}{M}=2^{k-n}$$

6 在凸四边形 $ABCD$ 中，$BA\neq BC$. ω_1 和 ω_2 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 的内切圆. 假设存在一个圆 ω 与射线 BA 相切(切点不在线段 BA 上)，与射线 BC 相切(切点不在线段 BC 上)，且与直线 AD 和直线 CD 都相切.

证明：圆 ω_1 和 ω_2 的两条外公切线的交点在圆 ω 上.

俄罗斯命题

证明 先证两个引理：

引理 1 设 $ABCD$ 是凸四边形，圆 ω 与射线 BA(不包括线段 BA) 相切，与射线 BC(不包括线段 BC) 相切，且与直线 AD 和直线 CD 都相切. 则

$$AB+AD=CB+CD$$

引理 1 的证明 设直线 AB,BC,CD,DA 分别与圆 ω 相切于点 P,Q,R,S，如图 49.3，则

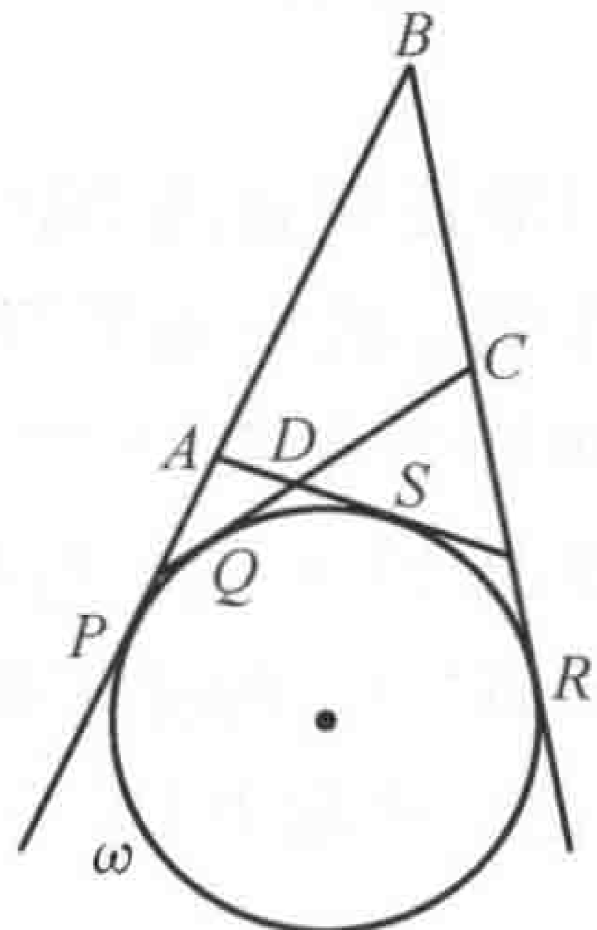


图 49.3

$$AB+AD=CB+CD\Leftrightarrow AB+(AD+DS)=$$
$$CB+(CD+DR)\Leftrightarrow AB+AS=CB+CR\Leftrightarrow$$
$$AB+AP=CB+CQ\Leftrightarrow BP=BR$$

从而引理 1 得证.

引理 2 设三个圆：圆 O_1，圆 O_2，圆 O_3 的半径两两不等，则它们的外位似中心共线.

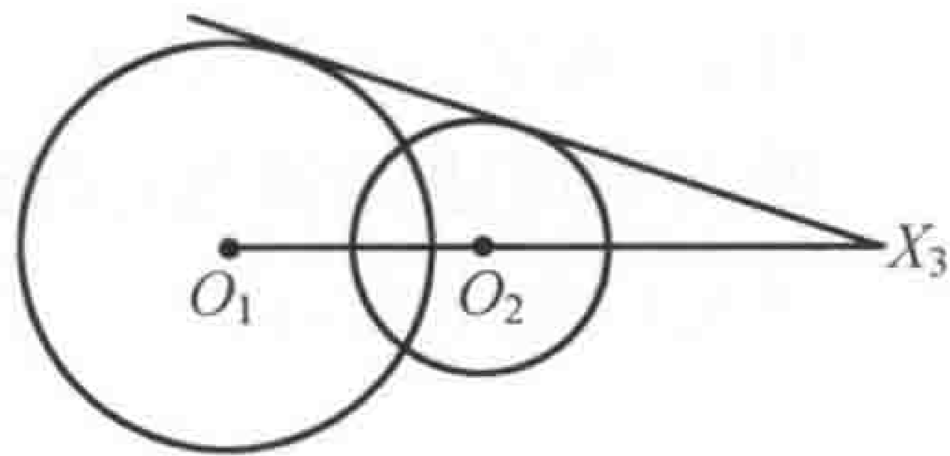


图 49.4

引理 2 的证明 设 X_3 是圆 O_1 与圆 O_2 的外位似中心，X_2 是圆 O_1 与圆 O_3 的外位似中心，X_1 是圆 O_2 与圆 O_3 的外位似中心，

r_i 是圆 $O_i(i=1,2,3)$ 的半径，由位似的性质知

$$\frac{\overline{O_1X_3}}{\overline{X_3O_2}}=-\frac{r_1}{r_2}$$

这里的$\overline{O_1X_3}$ 表示有向线段 O_1X_3，如图 49.4 所示. 同理

$$\frac{\overline{O_2X_1}}{\overline{X_1O_3}}=-\frac{r_2}{r_3},\frac{\overline{O_3X_2}}{\overline{X_2O_1}}=-\frac{r_3}{r_1}$$

所以

$$\frac{\overline{O_1X_3}}{\overline{X_3O_2}}\cdot\frac{\overline{O_2X_1}}{\overline{X_1O_3}}\cdot\frac{\overline{O_3X_2}}{\overline{X_2O_1}}=\left(-\frac{r_1}{r_2}\right)\left(-\frac{r_2}{r_3}\right)\left(-\frac{r_3}{r_1}\right)=-1$$

由梅内劳斯定理知，X_1,X_2,X_3 三点共线.

设 U,V 分别是 ω_1 和 ω_2 与 AC 的切点，如图 49.5，则

$$AV=\frac{AD+AC-CD}{2}=\frac{AC}{2}+\frac{AD-CD}{2}=$$

$$\frac{AC}{2}+\frac{CB-AB}{2}=\frac{AC+CB-AB}{2}\text{(由引理 1)}=$$

$$CU$$

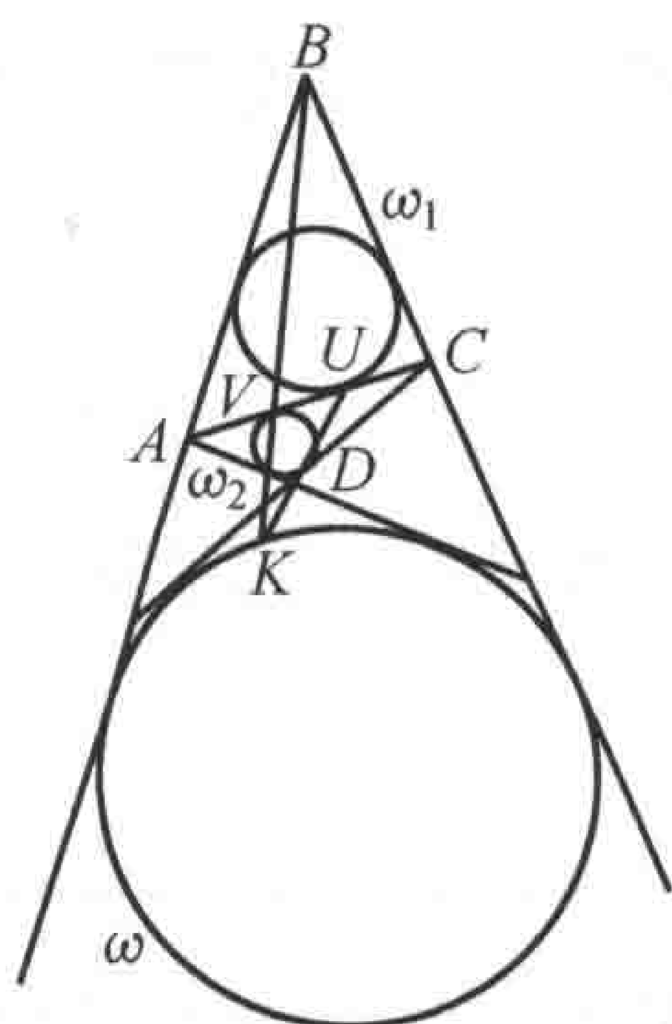


图 49.5

所以，三角形 ABC 的关于顶点 B 的旁切圆 ω_3 与边 AC 的切点亦为 V. 因此，ω_2 与 ω_3 内切于点 V，即 V 为 ω_2 与 ω_3 的外位似中心. 设 K 是 ω_1 与 ω_2 的外位似中心(即两条外公切线的交点)，由引理 2 知，K,V,B 三点共线.

完全类似地可得 K,D,U 三点共线.

因为

$$BA\neq BC$$

所以，$U\neq V$(否则，由 $AV=CU$ 知，$U=V$ 是边 AC 的中点，与 $BA\neq BC$ 矛盾). 所以，直线 BV 与 DU 不重合，故

$$K=BV\cap DU$$

于是只需证明直线 BV 与 DU 的交点在圆 ω 上.

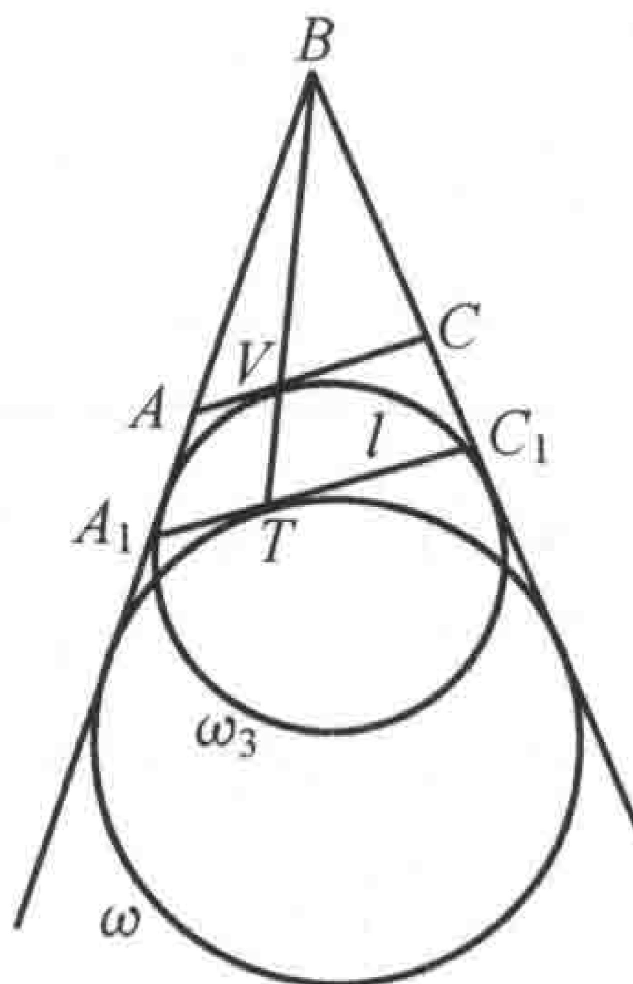


图 49.6

作圆 ω 的一条平行于 AC 的切线 l(靠近边 AC 的那条)，设 l 与圆 ω 相切于点 T，下证 B,V,T 三点共线.

如图 49.6，设 l 与射线 BA，BC 分别交于点 A_1，C_1，则圆 ω 是三角形 BA_1C_1 的关于顶点 B 的旁切圆，T 是它与 A_1C_1 的切点，而圆 ω_3 是三角形 BAC 关于点 B 的旁切圆，圆 ω_3 与 AC 相切于点 V. 则由

$$A_1C_1 /\!/ AC$$

知，$\triangle BAC$ 与 $\triangle BA_1C_1$ 以 B 为中心位似，而 V,T 分别是对应旁切圆与对应边的切点，因此，V,T 是这一对位似形中心的对应点，而 B 是位似中心，故 B,V,T 共线. 从而命题得证.

第 49 届国际数学奥林匹克英文原题

The forty-ninth IMO was held from July 10th to July 22th 2008 in the city of Spain.

1 Let H be the orthocenter of an acute-angled triangle ABC. The circle centered at the midpoint of BC and passing through H intersects the sideline BC at points A_1 and A_2. Similarly, define the points B_1, B_2, C_1 and C_2. (Russia)

Prove that six points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 and C_2 are concyclic.

2 (1) If x, y and z are three real numbers, all different from 1, such that $xyz=1$, then prove that (Austria)

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geqslant 1$$

(2) prove that equality is achieved for infinitely many triples of rational numbers x, y and z.

3 Prove that there are infinite many positive integers n such that n^2+1 has a prime factor greater than $2n+\sqrt{2}n$. (Lithuania)

4 Find all functions $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ (so f is a function from the positive real numbers) such that (Korea)

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

for all positive real numbers w, x, y, z, satisfying $wx=yz$.

5 Let n and k be positive integers with $k\geqslant n$ and $k-n$ an even number. Let $2n$ lamps labelled $1, 2, \cdots, 2n$ be given, each of which can be either on or off. Initially all the lamps are off. We consider sequences of steps, at each step, one of the lamps is switched (from on to off or from off to on). (France)

We consider the length of k sequences of steps, the sequences of the i item is the switched lamp′s number when the i step.

Let N be the number of such sequences consisting of k steps and resulting in the state where lamps 1 through n are all on, and lamps $n+1$ through $2n$ are all off.

Let M be number of such sequences consisting of k steps, resulting in the state where lamps 1 through n are all on, and lamps $n+1$ through $2n$ are all off, but where none of the lamps $n+1$ through $2n$ is ever switched on.

Determine $\frac{N}{M}$.

❻ Let $ABCD$ be a convex quadrilateral with BA different from BC. Denote the incircles of triangles ABC and ADC by ω_1 and ω_2 respectively. Suppose that there exists a circle ω tangent to ray BA (tangent point is not in the line BA) and to the ray BC (tangent point is not in the line BC), which is also tangent to the lines AD and CD.

Prove that the common external tangents to ω_1 and ω_2 intersects on ω.

(Russia)

第 49 届国际数学奥林匹克成绩综述

2008,西班牙

第 49 届国际数学奥林匹克竞赛于 2008 年 7 月 10 日至 22 日在西班牙首都马德里举行,来自 103 个国家及地区的 549 名学生参加了这次比赛.经过两天的角逐,中国队以 217 分获得团体总分第一名.其中牟晓生和韦东奕获得了满分(共 3 个满分,另一个满分是美国队的 Alex Zhai).共有 47 名选手获得了金牌,100 名选手获得了银牌,120 名选手获得了铜牌.

中国队的成员如下:领队熊斌(华东师范大学数学系),副领队冯志刚(上海市上海中学),观察员李伟固(北京大学数学学院)和梁丽平(北京市人大附中);队员:牟晓生(上海市上海中学高二,42 分(满分),金牌),韦东奕(山东省山东师大附中高一,42 分(满分),金牌),张瑞祥(北京市人大附中高三,35 分,金牌),张成(上海市华东师大二附中高三,35 分,金牌),陈卓(女)(湖北省华中师大一附中高三,35 分,金牌),吴天琦(浙江省嘉兴一中高三,28 分,银牌).

获得团体总分前 6 名的队及其总分如下:

第一名　中国　217 分　　第二名　俄罗斯　199 分

第三名　美国　190 分　　第四名　韩国　188 分

第五名　伊朗　181 分　　第六外　泰国　175 分

本届 IMO 的金牌分数线是 31 分,银牌分数线是 22 分,铜牌分数线是 15 分.

第 49 届国际数学奥林匹克预选题

西班牙,2008

代数部分

1 求所有的函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$,满足对所有的正实数 $w,x,y,z,wx=yz$,都有

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

解 此题答案与本届 IMO 试题的第 4 题答案相同.

2 (1) 设实数 x,y,z 都不等于 1,满足 $xyz=1$,求证

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geqslant 1$$

(2) 证明:存在无穷多组三元有理数组 (x,y,z),x,y,z 都不等于 1,且 $xyz=1$,使得上述不等式等号成立.

证明 此题答案与本届 IMO 试题的第 2 题答案相同.

3 (荷兰) 设 $S\subseteq R$ 是一个实数集,称从 S 到 S 的函数对 (f,g) 为一个"西班牙组合",满足以下条件:

(i) 两个函数都是严格增加的,即对于任意的 $x,y\in S$,且 $x<y$,都有

$$f(x)<f(y),g(x)<g(y)$$

(ii) 对于任意的 $x\in S$,有

$$f(g(g(x)))<g(f(x))$$

试确定在下列两种情况下是否存在西班牙组合?

(1) 集合 $S=\mathbf{N}_+$ 是正整数集;

(2) 集合 $S=\left\{a-\frac{1}{b}\mid a、b\text{ 是正整数}\right\}$.

解 (1) 不存在.

设

$$g_0(x)=x, g_k(x)=\underbrace{g(g(\cdots g(x)\cdots))}_{k\text{个}}$$

假设在集合 $\mathbf{N}_+$ 的情况下，存在一个西班牙组合 (f,g). 由条件(i)，可得

$$f(x)\geqslant x, g(x)\geqslant x$$

对任意的 $x\in\mathbf{N}_+$ 成立.

下面证明：对任意的非负整数 k 和任意的正整数 x，有

$$g_k(x)\leqslant f(x)$$

对 k 用数学归纳法.

当 $k=0$ 时，由 $x\leqslant f(x)$ 知结论成立.

假设 k 时结论成立，在归纳假设中，用 $g_2(x)$ 代替 x，并应用条件(ii) 可得

$$g(g_{k+1}(x))=g_k(g_2(x))\leqslant f(g_2(x))<g(f(x))$$

因为 g 是严格增加的，所以

$$g_{k+1}(x)<f(x)$$

若对于任意的 $x\in\mathbf{N}_+$，有

$$g(x)=x$$

则

$$f(g(g(x)))=f(x)=g(f(x))$$

与条件(ii) 矛盾. 因此，存在 $x_0\in\mathbf{N}_+$，使得

$$x_0<g(x_0)$$

下面考虑数列 $x_0,x_1,\cdots$，其中

$$x_k=g_k(x_0), x_0<g(x_0)=x_1$$

若 $x_k<x_{k+1}$，则

$$x_{k+1}=g(x_k)<g(x_{k+1})=x_{k+2}$$

故数列 $\{x_k\}$ 是严格递增的正整数数列.

另一方面，这个数列

$$x_k=g_k(x_0)\leqslant f(x_0)$$

有上界，矛盾.

因此，在集合 $\mathbf{N}_+$ 的情况下，不存在西班牙组合 (f,g).

(2) 存在.

设

$$f\left(a-\frac{1}{b}\right)=a+1-\frac{1}{b}$$

$$g\left(a-\frac{1}{b}\right)=a-\frac{1}{b+3^a}$$

则 f 和 g 严格递增，且满足

$$f\left(g\left(g\left(a-\frac{1}{b}\right)\right)\right)=a+1-\frac{1}{b+2\times 3^a}<$$

$$a+1-\frac{1}{b+3^{a+1}}=$$

$$g\left(f\left(a-\frac{1}{b}\right)\right)$$

因此,(f,g) 是一个西班牙组合.

4 对于整数 m,在 $\{1,2,3\}$ 中存在唯一的一个数 $t(m)$,使得 $m+t(m)$ 是 3 的倍数. 函数 $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ 满足 $f(-1)=0$,$f(0)=1$,$f(1)=-1$,且对于所有满足 $2^n>m$ 的非负整数 m,n,有

$$f(2^n+m)=f(2^n-t(m))-f(m)$$

证明:对于任意的非负整数 p,均有 $f(3p)\geqslant 0$.

证明 由已知条件可知,对于每个正整数 n,$f(n)$ 是唯一确定的,且 $f(1)$,$f(2)$,$\cdots$ 的符号变化看起来也毫无规律. 不过只要直接计算所有形如 $f(2^n-t(m))$ 的值就足够了.

事实上,设 $n>0$,且设 $n=\sum_{i=0}^{k}2^{a_i}$,其中

$$a_0>a_1>\cdots>a_k\geqslant 0$$

再设

$$n_j=2^{a_j}+2^{a_{j+1}}+\cdots+2^{a_k},j=0,1,\cdots,k$$

由已知条件可得

$$f(n)=\sum_{j=0}^{l}[(-1)^j f(2^{a_j}-t(n_{j+1}))]+(-1)^{l+1}f(n_{l+1})$$

其中

$$l=0,1,\cdots,k-1$$

下面计算:$f(2^n-1)$,$f(2^n-2)$,$f(2^n-3)$ 的值.

特别地,有

$$t(2^{2k}-3)=2,t(2^{2k}-2)=1$$

$$t(2^{2k}-1)=3,t(2^{2k+1}-3)=1$$

$$t(2^{2k+1}-2)=3,t(2^{2k+1}-1)=2$$

首先证明一个命题.

命题 证明:对于任意的非负整数 k,有

$$f(2^{2k+1}-3)=0,f(2^{2k+1}-2)=3^k$$

$$f(2^{2k+1}-1)=-3^k,f(2^{2k+2}-3)=-3^k$$

$$f(2^{2k+2}-2)=-3^k,f(2^{2k+2}-1)=2\times 3^k$$

命题的证明 对 k 用数学归纳法.

当 $k=0$ 时

$$f(-1)=0,f(0)=1,f(1)=-1$$

$$f(2)=f(2-t(0))-f(0)=f(-1)-f(0)=-1$$

$$f(3)=f(2-t(1))-f(1)=f(0)-f(1)=2$$

结论成立.

假设 $k-1$ 时,结论成立.

考虑 $f(2^{2k+1}-t(m))$,可得

$$f(2^{2k+1}-3)=f(2^{2k}+(2^{2k}-3))=$$
$$f(2^{2k}-2)-f(2^{2k}-3)=$$
$$-3^{k-1}+3^{k-1}=0$$
$$f(2^{2k+1}-2)=f(2^{2k}+(2^{2k}-2))=$$
$$f(2^{2k}-1)-f(2^{2k}-2)=$$
$$2\times 3^{k-1}+3^{k-1}=3^k$$
$$f(2^{2k+1}-1)=f(2^{2k}+(2^{2k}-1))=$$
$$f(2^{2k}-3)-f(2^{2k}-1)=$$
$$-3^{k-1}-2\times 3^{k-1}=-3^k$$

考虑 $f(2^{2k+2}-t(m))$,可得

$$f(2^{2k+2}-3)=f(2^{2k+1}+(2^{2k+1}-3))=$$
$$f(2^{2k+1}-1)-f(2^{2k+1}-3)=$$
$$-3^k-0=-3^k$$
$$f(2^{2k+2}-2)=f(2^{2k+1}+(2^{2k+1}-2))=$$
$$f(2^{2k+1}-3)-f(2^{2k+1}-2)=$$
$$0-3^k=-3^k$$
$$f(2^{2k+2}-1)=f(2^{2k+1}+(2^{2k+1}-1))=$$
$$f(2^{2k+1}-2)-f(2^{2k+1}-1)=$$
$$3^k+3^k=2\times 3^k$$

回到原题.

当 $2^n-t(m)$ 可以被 3 整除时

$$f(2^n-t(m))\geqslant 3^{\frac{n-1}{2}}$$

当 $2^n-t(m)$ 不能被 3 整除时

$$f(2^n-t(m))\leqslant 0$$

因 $2^n-t(m)$ 被 3 整除当且仅当 2^n+m 能被 3 整除,所以,对任意的非负整数 m,n,有两个结论:

(1) 若 2^n+m 能被 3 整除,则

$$f(2^n-t(m))\geqslant 3^{\frac{n-1}{2}}$$

(2) 若 2^n+m 不能被 3 整除,则

$$f(2^n-t(m))\leqslant 0$$

此外,还可以得到

$$|f(2^n-t(m))|\leqslant \frac{2}{3}\times 3^{\frac{n}{2}}$$

对于任意的非负整数 m,n 成立.这个不等式还不能让我们得到对

于小于 2 的整数次幂的非负整数 m，$|f(m)|$ 的上界.

首先用数学归纳法证明：对于任意的非负整数 m,n，且 $2^n > m$，有

$$|f(m)| \leqslant 3^{\frac{n}{2}}$$

当 $n=0$ 时，$f(0)=1$，结论成立.

假设 n 时结论成立.

对于 $n+1$ 时，考虑满足 $2^{n+1} > m$ 的非负整数 m.

若 $m < 2^n$，由归纳假设可得结论成立.

当 $m \geqslant 2^n$，设

$$m = 2^n + k, 2^n > k \geqslant 0$$

由

$$|f(2^n - t(k))| \leqslant \frac{2}{3} \times 3^{\frac{n}{2}}$$

及归纳假设可得

$$\begin{aligned}|f(m)| &= |f(2^n - t(k)) - f(k)| \leqslant \\ &|f(2^n - t(k))| + |f(k)| \leqslant \\ &\frac{2}{3} \times 3^{\frac{n}{2}} + 3^{\frac{n}{2}} < 3^{\frac{n+1}{2}}\end{aligned}$$

其次证明：对于任意的非负整数 p，有

$$f(3p) \geqslant 0$$

因为 $3p$ 不是 2 的整数次幂，所以在二进制表示下至少有两个 1.

设

$$3p = 2^a + 2^b + c, a > b, 2^b > c \geqslant 0$$

则

$$\begin{aligned}&f(3p) = f(2^a + 2^b + c) = \\ &f(2^a - t(2^b + c)) - f(2^b + c) = \\ &f(2^a - t(2^b + c)) - f(2^b - t(c)) + f(c)\end{aligned}$$

因为 $2^a + 2^b + c$ 可以被 3 整除，所以由结论(1) 可得

$$f(2^a - t(2^b + c)) \geqslant 3^{\frac{a-1}{2}}$$

因为 $2^b + c$ 不能被 3 整除，所以由结论(2) 可得

$$f(2^b - t(c)) \leqslant 0$$

由于当 $2^b > c \geqslant 0$ 时，有

$$|f(c)| \leqslant 3^{\frac{b}{2}}$$

因此

$$f(c) \geqslant -3^{\frac{b}{2}}$$

结合 $a > b$，有

$$f(3p) \geqslant 3^{\frac{a-1}{2}} - 3^{\frac{b}{2}} \geqslant 0$$

5 已知正实数 a,b,c,d 满足 $abcd=1$，$a+b+c+d>\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$.

证明

$$a+b+c+d<\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}$$

证明 首先证明:若 $abcd=1$，则 $a+b+c+d$ 不超过 $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$ 与 $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}$ 的加权平均.

由均值不等式有

$$a=\sqrt[4]{\frac{a^4}{abcd}}=\sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{a}{d}}\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a}{d}\right)$$

同理

$$b\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{b}{a}\right)$$

$$c\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{c}{d}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}+\frac{c}{b}\right)$$

$$d\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{d}{a}+\frac{d}{a}+\frac{a}{b}+\frac{d}{c}\right)$$

上面四式相加得

$$a+b+c+d\leqslant\frac{3}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}\right)$$

由

$$a+b+c+d>\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$$

则

$$a+b+c+d<\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}$$

6 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{N}_+$ 满足对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$，有

$$f\left(x+\frac{1}{f(y)}\right)=f\left(y+\frac{1}{f(x)}\right)\qquad ①$$

证明:存在一个正整数不属于 f 的值域.

证明 假设结论不正确，则

$$f(\mathbf{R})=\mathbf{N}_+$$

为了得到矛盾，先证明函数 f 的一些性质.

可以假设

$$f(0)=1$$

事实上，设 $a\in\mathbf{R}$，使得

$$f(a)=1$$

考虑函数

$$g(x)=f(x+a)$$

在式 ① 中用 $x+a$ 和 $y+a$ 代替 x,y 可得

$$g\left(x+\frac{1}{g(y)}\right)=f\left(x+a+\frac{1}{f(y+a)}\right)=$$
$$f\left(y+a+\frac{1}{f(x+a)}\right)=g\left(y+\frac{1}{g(x)}\right)$$

因此，g 也满足函数方程 ①，且 $g(0)=1$.

结合 g 和 f 有相同的值域，即

$$g(\mathbf{R})=f(\mathbf{R})=\mathbf{N}_+$$

从而，假设 $f(0)=1$.

命题 1 对于任意一个固定的 $c\in\mathbf{R}$，有

$$\left\{f\left(c+\frac{1}{n}\right)\mid n\in\mathbf{N}_+\right\}=\mathbf{N}_+$$

命题 1 的证明 由式 ① 和 $f(\mathbf{R})=\mathbf{N}_+$ 得

$$f(\mathbf{R})=\left\{f\left(x+\frac{1}{f(c)}\right)\mid x\in\mathbf{R}\right\}=$$
$$\left\{f\left(c+\frac{1}{f(x)}\right)\mid x\in\mathbf{R}\right\}\subset$$
$$\left\{f\left(c+\frac{1}{n}\right)\mid n\in\mathbf{N}_+\right\}\subset f(\mathbf{R})$$

命题 1 得证.

特别地，在命题 1 中，令 $c=0$ 和 $c=\frac{1}{3}$，可得

$$\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)\mid n\in\mathbf{N}_+\right\}=\left\{f\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)\mid n\in\mathbf{N}_+\right\}=\mathbf{N}_+ \qquad ②$$

命题 2 若对于某两个实数 u,v，有

$$f(u)=f(v)$$

则对于所有的非负有理数 q，有

$$f(u+q)=f(r+q)$$

命题 2 的证明 对于任意的实数 x，由式 ① 可得

$$f\left(u+\frac{1}{f(x)}\right)=f\left(x+\frac{1}{f(u)}\right)=f\left(x+\frac{1}{f(v)}\right)=f\left(v+\frac{1}{f(x)}\right)$$

由于 $f(x)$ 可以取到所有的正整数，因此，对于任意的 $n\in\mathbf{N}_+$，有

$$f\left(u+\frac{1}{n}\right)=f\left(v+\frac{1}{n}\right)$$

设正有理数 $q=\frac{k}{n}(k,n\in\mathbf{N}_+)$，将前面得到的等式用 k 次可得

$$f(u+q)=f\left(u+\frac{k}{n}\right)=f\left(v+\frac{k}{n}\right)=f(v+q)$$

命题 2 得证.

设存在某个非负有理数 q，满足

$$f(q)=1$$

对于任意的正整数 k，由于 $f(0)=1$，则

$$f(0)=f(q)$$

于是

$$f(q)=f(2q),f(2q)=f(3q),\cdots,f((k-1)q)=f(kq)$$

命题 3 对于所有的非负有理数 q，有

$$f(q)=f(q+1)$$

命题 3 的证明 由式 ② 可知，存在正整数 m，使得 $f\left(\frac{1}{m}\right)=1$.

于是

$$f(1)=f\left(\frac{m}{m}\right)=f\left(\frac{1}{m}\right)=1$$

(即在命题 2 后面的结论中令 $q=\frac{1}{m},k=m$).

由

$$f(0)=f(1)=1$$

由命题 2 可得，对于所有的非负有理数 q，有

$$f(q)=f(q+1)$$

命题 4 对于每个正整数 n，有 $f\left(\frac{1}{n}\right)=n$.

命题 4 的证明 对于一个非负有理数 q，在式 ① 中，令 $x=q$，$y=0$，在结合命题 3，得

$$f\left(\frac{1}{f(q)}\right)=f\left(q+\frac{1}{f(0)}\right)=f(q+1)=f(q) \quad ③$$

由式 ②，对于每个正整数 n，都存在一个正整数 k，使得

$$f\left(\frac{1}{k}\right)=n$$

在式 ③ 中，取 $q=\frac{1}{k}$ 得

$$n=f\left(\frac{1}{k}\right)=f\left[\frac{1}{f\left(\frac{1}{k}\right)}\right]=f\left(\frac{1}{n}\right)$$

回到原题.

由式 ② 可知,存在正整数 n,使得

$$f\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)=1$$

设

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{n}=\frac{s}{t}$$

(s,t 是互质的正整数),因为 $\frac{1}{3}+\frac{1}{n}$ 不是整数,所以,$t>1$.

由裴蜀定理,存在正整数 k,l,使得

$$ks-lt=1$$

因为

$$f(0)=f\left(\frac{s}{t}\right)=1$$

所以,由命题 2 后面的结论可得

$$f\left(k\cdot\frac{s}{t}\right)=1$$

连续用 l 次命题 3 可得

$$f\left(k\cdot\frac{s}{t}\right)=f\left(\frac{1}{t}+l\right)=f\left(\frac{1}{t}\right)\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{t}\right)=1$$

由命题 4,有

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=t$$

矛盾.

因此,原命题成立.

7 证明:对于任意的正实数 a,b,c,d,都有

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a+b+c}+\frac{(b-c)(b-d)}{b+c+d}+\frac{(c-d)(c-a)}{c+d+a}+\frac{(d-a)(d-b)}{d+a+b}\geqslant 0$$

并确定等号成立的条件.

证明 设

$$A=\frac{(a-b)(a-c)}{a+b+c}$$

$$B=\frac{(b-c)(b-d)}{b+c+d}$$

$$C=\frac{(c-d)(c-a)}{c+d+a}$$

$$D=\frac{(d-a)(d-b)}{d+a+b}$$

则

$$2A = A' + A''$$

其中

$$A' = \frac{(a-c)^2}{a+b+c}$$

$$A'' = \frac{(a-c)(a-2b+c)}{a+b+c}$$

类似地有

$$2B = B' + B'', 2C = C' + C'', 2D = D' + D''$$

设

$$s = a+b+c+d$$

则 A,B,C,D 的分母分别为

$$s-d, s-a, s-b, s-c$$

由柯西不等式得

$$\left(\frac{|a-c|}{\sqrt{s-d}} \cdot \sqrt{s-d} + \frac{|b-d|}{\sqrt{s-a}} \cdot \sqrt{s-a} + \frac{|c-a|}{\sqrt{s-b}} \cdot \sqrt{s-b} + \frac{|d-b|}{\sqrt{s-c}} \cdot \sqrt{s-c}\right)^2 \leqslant \left[\frac{(a-c)^2}{s-d} + \frac{(b-d)^2}{s-a} + \frac{(c-a)^2}{s-b} + \frac{(d-b)^2}{s-c}\right](4s-s) \Rightarrow 3s(A'+B'+C'+D')$$

故

$$A'+B'+C'+D' \geqslant \frac{(2|a-c|+2|b-d|)^2}{3s} \geqslant \frac{16|a-c| \cdot |b-d|}{3s} \quad ①$$

$$A''+C'' = \frac{(a-c)(a+c-2b)}{s-d} + \frac{(c-a)(c+a-2d)}{s-b} = \frac{(a-c)(a+c-2b)(s-b)+(c-a)(c+a-2d)(s-d)}{(s-d)(s-b)} = \frac{(a-c)[-2b(s-b)-b(a+c)+2d(s-d)+d(a+c)]}{s(a+c)+bd} = \frac{3(a-c)(d-b)(a+c)}{M}$$

其中

$$M = s(a+c)+bd$$

同理

$$B''+D'' = \frac{3(b-d)(a-c)(b+d)}{N}$$

其中

$$N = s(b+d)+ca$$

故

$$A''+B''+C''+D''=3(a-c)(b-d)\left(\frac{b+d}{N}-\frac{a+c}{M}\right)=$$

$$\frac{3(a-c)(b-d)W}{MN} \quad ②$$

其中

$$W=(b+d)M-(a+c)N=(b+d)bd-(a+c)ac$$

又

$$MN=s^2(a+c)(b+d)+s(a+c)ac+$$
$$s(b+d)bd+abcd>$$
$$s[(a+c)ac+(b+d)bd]\geqslant |W|s \quad ③$$

则由式 ②,③ 得

$$|A''+B''+C''+D''|\leqslant\frac{3|a-c|\cdot|b-d|}{s}$$

结合式 ① 得

$$2(A+B+C+D)=(A'+B'+C'+D')+$$
$$(A''+B''+C''+D'')\geqslant$$
$$\frac{16|a-c|\cdot|b-d|}{3s}-$$
$$\frac{3|a-c|\cdot|b-d|}{s}=$$
$$\frac{7|a-c|\cdot|b-d|}{3(a+b+c+d)}\geqslant 0$$

因此,原不等式成立,且等号成立的条件为

$$a=c,b=d$$

组合部分

1 考虑平面上边平行于坐标轴的矩形(长和宽均大于 0),并称这样的一个矩形为一个“箱子”.如果两个箱子有公共点(包括箱子的内部或边界上的公共点),则称两个箱子“相交”.求最大的正整数 n,使得存在 n 个箱子 $B_1,B_2,\cdots,B_n$,满足 B_i 与 B_j 相交当且仅当 $i\neq j\pm 1 \pmod n$.

解 满足条件的最大值为 6.一个例子如图 49.7 所示.

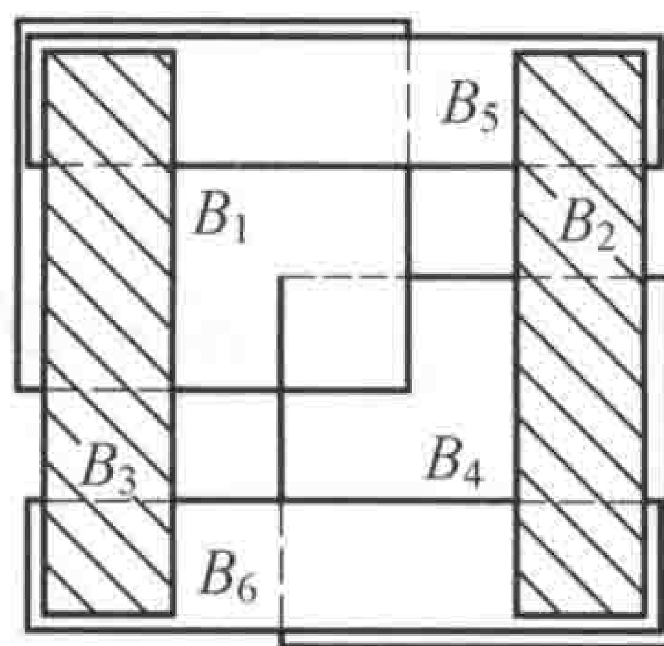


图 49.7

下面证明:6 是最大值.

假设箱子 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足条件.设 B_k 在 x 轴,y 轴上的投影所对应的闭区间分别为 $I_k,J_k(1\leqslant k\leqslant n)$.

若 B_i 和 B_j 相交,且公共点为 (x,y),则

$$x\in I_i\cap I_j,y\in J_i\cap J_j$$

因此,$I_i\cap I_j$ 和 $J_i\cap J_j$ 非空.反之,若存在实数 x,y,满足 $x\in$

$I_i \cap I_j$，$y \in J_i \cap J_j$，则(x,y)是B_i和B_j的一个公共点．从而，B_i和B_j不相交当且仅当它们在坐标轴上的投影所对应的区间I_i，I_j和J_i，J_j中至少有一个不相交，即要么

$$I_i \cap I_j = \varnothing$$

要么

$$J_i \cap J_j = \varnothing$$

为方便起见，如果箱子的下标在模n的意义下相差1，则称两个箱子或两个区间是"相邻的"．其他情形称为不相邻．

对于每个$k=1,2,\cdots,n$，相邻的箱子B_k和B_{k+1}是不相交的，于是，(I_k,I_{k+1})或$(J_k,J_{k+1})$$(1 \leqslant k \leqslant n)$是一对不相交的区间．因此，在

$$(I_1,I_2),\cdots,(I_{n-1},I_n),(I_n,I_1)$$
$$(J_1,J_2),\cdots,(J_{n-1},J_n),(J_n,J_1)$$

中至少有n对不相交的区间．

因为任意两个不相邻的箱子都是相交的，所以，它们在两个坐标轴上对应的区间也都是相交的．

命题　设$\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n$是数轴上的$n$个闭区间，且任意两个不相邻的区间都相交，则满足$\Delta_k$和$\Delta_{k+1}$$(k=1,2,\cdots,n)$是不相交的区间对最多有3个．

命题的证明　设$\Delta_k=[a_k,b_k]$$(1 \leqslant k \leqslant n)$，有

$$\alpha = \max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

是$\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n$的左端点中最右边的点

$$\beta = \min\{(b_1,b_2,\cdots,b_n)\}$$

是$\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n$的右端点中最左边的点．不失一般性，假设$\alpha=a_2$．

若$\alpha \leqslant \beta$，则对于所有的$i(i=1,2,\cdots,n)$有

$$a_i \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b_i$$

每个Δ_i都包含α，因此，没有不相交的区间对(Δ_i,Δ_{i+1})．

若$\beta<\alpha$，则存在$i \in \{1,2,\cdots,n\}$，使得$\beta=b_i$，且有

$$a_i < b_i = \beta < \alpha = a_2 < b_2$$

于是，Δ_2和Δ_i是不相交的．因为除了Δ_1和Δ_3，Δ_2与其他区间都相交，所以，Δ_2和Δ_i不相交当且仅当$i=1$或$i=3$．由对称性，假设$i=3$，则$\beta=b_3$．因为$\Delta_4,\Delta_5,\cdots,\Delta_n$中的每一个区间都与$\Delta_2$相交，所以，对于$i=4,5,\cdots,n$，有

$$a_i \leqslant \alpha \leqslant b_i$$

因此

$$\alpha \in \Delta_4 \cap \Delta_5 \cap \cdots \cap \Delta_n$$

即

$$\Delta_4 \cap \Delta_5 \cap \cdots \cap \Delta_n \neq \varnothing$$

类似地，$\Delta_5,\cdots,\Delta_n,\Delta_1$ 也都与 Δ_3 相交. 于是

$$\beta \in \Delta_5 \cap \cdots \cap \Delta_n \cap \Delta_1$$

即

$$\Delta_5 \cap \cdots \cap \Delta_n \cap \Delta_1 \neq \varnothing$$

因此，剩下的区间对

$$(\Delta_1,\Delta_2),(\Delta_2,\Delta_3),(\Delta_3,\Delta_4)$$

是可能的不相交的区间对. 从而，最多有 3 个.

由命题可知满足条件的正整数 n 的最大值为 6.

2 对每个正整数 n，求集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的数目，其中，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足对于 $k=1,2,\cdots,n$，$2(a_1+a_2+\cdots+a_k)$ 可以被 k 整除.

解 对于每个正整数 n，设 F_n 为集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 满足条件的排列的数目，并称这些排列是“好的”. 则对于 $n=1,2,3$，知每个排列都是好的. 因此

$$F_1=1,F_2=3,F_3=6$$

对于 $n>3$，考虑 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个好的排列 $(a_1+a_2+\cdots+a_n)$，则 $n-1$ 是

$$2(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})=2[(1+2+\cdots+n)-a_n]=$$
$$n(n+1)-2a_n=(n+2)(n-1)+(2-2a_n)$$

的因数. 因此，$2a_n-2$ 可以被 $n-1$ 整除. 于是，$2a_n-2$ 等于 0 或 $n-1$ 或 $2n-2$，即

$$a_n=1 \text{ 或 } a_n=\frac{n+1}{2} \text{ 或 } a_n=n$$

假设 $a_n=\frac{n+1}{2}$. 因为排列是好的，可取 $k=n-2$，所以，$n-2$ 是

$$2(a_1+a_2+\cdots+a_{n-2})=2[(1+2+\cdots+n)-a_n-a_{n-1}]=$$
$$n(n+1)-(n+1)-2a_{n-1}=(n+2)(n-2)+(3-2a_{n-1})$$

的因数. 因此，$2a_{n-1}-3$ 可以被 $n-2$ 整除. 于是，$2a_{n-1}-3$ 等于 0 或 $n-2$ 或 $2n-4$.

由于 $2a_{n-1}-3$ 是奇数，则其不可能等于 0 和 $2n-4$. 从而

$$2a_{n-1}-3=n-2$$

即

$$a_{n-1}=\frac{n+1}{2}=a_n$$

矛盾.

假设 $a_n=n$. 则 $(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})$ 是 $\{1,2,\cdots,n-1\}$ 的一个好的

排列.因此,有 F_{n-1} 个好的排列.将 n 加入到这些好的排列的每一个,并作为最后一项(即第 n 项),于是,得到$\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个好的排列.

假设 $a_n=1$,则$(a_1-1,a_2-1,\cdots,a_{n-1}-1)$ 是$\{1,2,\cdots,n-1\}$ 的一个排列,且是好的排列,这是因为对任意的正整数 $k\leqslant n-1$,有

$$2[(a_1-1)+(a_2-1)+\cdots+(a_k-1)]=$$
$$2(a_1+a_2+\cdots+a_k)-2k$$

可以被 k 整除.因此,$\{1,2,\cdots,n-1\}$ 的 F_{n-1} 个好的排列中的任意一个$(b_1,b_2,\cdots,b_{n-1})$,将1加入到这个排列,并作为最后一项,且前 $n-1$ 项每项加1,得到的排列$(b_1+1,b_2+1,\cdots,b_{n-1}+1,1)$ 是$\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个好的排列.

故$\{1,2,\cdots,n\}$ 有 F_{n-1} 个好的排列,最后一项为 n,也有 F_{n-1} 个好的排列,最后一项为1.于是

$$F_n=2F_{n-1}$$

由 $F_3=6$,知当 $n\geqslant 4$ 时

$$F_n=3\times 2^{n-2}$$

3 考虑坐标平面上所有整点(横、纵坐标都是整数的点)的集合 S.对于每一个正整数 k,如果存在一个点 $C\in S$,使得 $\triangle ABC$ 的面积为 k,则两个不同的点 $A,B\in S$ 被称为"k—朋友";如果 T 中的任意两个点都是 k—朋友,则集合 $T\subset S$ 被称为一个"k—朋党".求最小的正整数 k,使得存在一个多于200个元素的 k—朋党.

解 首先考虑与点$(0,0)$是 k—朋友的点 $B\in S$.设 $B(u,v)$.则 B 与$(0,0)$是 k—朋友当且仅当存在点 $C(x,y)\in S$,使得

$$\frac{1}{2}\mid uy-vx\mid=k$$

(这里用到的是 $\triangle ABC$ 的面积公式,其中,A 为坐标原点).

存在整数 x,y,使得

$$\mid uy-vx\mid=2k$$

等价于 u,v 的最大公因数也是 $2k$ 的因数.从而,点 $B(u,v)\in S$ 与$(0,0)$是 k—朋友当且仅当 u,v 的最大公因数整除 $2k$.

如果两个点是 k—朋友,将它们平移至 S 中的另外两个点,则它们仍然是 k—朋友.因此,两个点 $A,B\in S,A(s,t),B(u,v)$ 是 k—朋友当且仅当点$(u-s,v-t)$与$(0,0)$是 k—朋友,即 $u-s$,$v-t$ 的最大公因数整除 $2k$.

设正整数 n 不整除 $2k$,则一个 k—朋党中元素的数目不超过

n^2.

事实上,所有点$(x,y)\in S$按模n的剩余被分成n^2类,若一个集合$T(T\subset S)$中有多于n^2个元素,则存在两个点$A,B\in T$,它们属于同一类.

设$A(s,t)$,$B(u,v)$,则

$$n\mid(u-s),n\mid(v-t)$$

于是,$n\mid d$,其中d为$u-s$,$v-t$的最大公因数.因为n不整除$2k$,所以,d也不整除$2k$,A,B不是k—朋友,T不是一个k—朋党.

设$M(k)$是不整除$2k$的最小的正整数,又设

$$M(k)=m$$

考虑满足$0\leqslant x,y<m$的所有点(x,y)构成的集合T.若$A(s,t)$,$B(u,v)$是T中的两个不同的点,则两个差的绝对值$|u-s|$,$|v-t|$均小于m,且至少有一个为正整数.于是,由m的定义可知,小于m的每个正整数都整除$2k$.

若$u-s$非零,则$u-s$整除$2k$.

同理,若$v-t$非零,则$v-t$也整除$2k$.

因此,$u-s$,$v-t$的最大公因数整除$2k$.这意味着A和B是k—朋友,从而,T是一个k—朋党.

由$M(k)$的定义,知一个k—朋党中元素数目的最大值为$(M(k))^2$.我们要求的是最小的k,使得

$$(M(k))^2>200$$

由$M(k)$的定义,知$2k$可以被$1,2,\cdots,M(k)-1$整除,不能被$M(k)$整除.

若

$$(M(k))^2>200$$

则

$$M(k)\geqslant 15$$

(1)$M(k)=15$,这显然与$2k$可以被3,5整除,不能被15整除矛盾.

(2)$M(k)=16$,则$2k$可以被$1,2,\cdots,15$整除,也可以被它们的最小公倍数L整除,但不能被16整除.因为L不是16的倍数,$k=\frac{L}{2}$是最小的k,且$M(k)=16$.

(3)$M(k)\geqslant 17$,则$2k$可以被$1,2,\cdots,16$的最小公倍数整除.而$1,2,\cdots,16$的最小公倍数等于$2L$,由$2k\geqslant 2L$,得$k\geqslant L>\frac{L}{2}$.

综上所述,满足条件的k的最小值为

$$\frac{L}{2}=180\ 180$$

4 设 n 和 k 是正整数，$k\geqslant n$，且 $k-n$ 是一个偶数. $2n$ 盏灯依次编号为 $1,2,\cdots,2n$，每一盏灯可以“开”和“关”. 开始时，所有的灯都是“关”的. 对这些灯可进行操作，每一次操作只改变其中的一盏灯的开关状态(即“开”变成“关”，“关”变成“开”)，我们考虑长度为 k 的操作序列，序列中的第 i 项就是第 i 次操作时被改变开关状态的那盏灯的编号.

设 N 是 k 次操作后，使得灯 $1,\cdots,n$ 是“开”的，灯 $n+1,\cdots,2n$ 是“关”的状态的所有不同的操作序列的个数.

设 M 是 k 次操作后，使得灯 $1,\cdots,n$ 是“开”的，灯 $n+1,\cdots,2n$ 是“关”的，但是灯 $n+1,\cdots,2n$ 始终没有被开过的所有不同的操作序列的个数.

求比值 $\frac{N}{M}$.

解 此题答案与本届 IMO 试题的第 5 题答案相同.

5 设 $k+l$ 元实数集 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_{k+l}\}$ 满足 $0\leqslant x_j\leqslant 1$ $(i=1,2,\cdots,k+l;k,l$ 是正整数). 如果满足

$$\left|\frac{1}{k}\sum_{x_i\in A}x_i-\frac{1}{l}\sum_{x_j\in \frac{S}{A}}x_j\right|\leqslant\frac{k+l}{2kl}$$

则称 S 的一个 k 元子集 A 是“好的”. 证明：好的子集的数目至少有 $\frac{2}{k+l}C_{k+l}^{k}$ 个.

证明 对于 S 的一个 k 元子集 A，设

$$f(A)=\frac{1}{k}\sum_{x_i\in A}x_i-\frac{1}{l}\sum_{x_j\in \frac{S}{A}}x_j,\frac{k+l}{2kl}=d$$

由定义，若

$$|f(A)|\leqslant d$$

则子集 A 是好的.

对于集合

$$S=\{x_1,x_2,\cdots,x_{k+l}\}$$

的每一个排列

$$\{y_1,y_2,\cdots,y_{k+l}\}$$

其“确定”了 S 的 $k+l$ 个 k 元子集

$$A_i=\{y_i,y_{i+1},\cdots,y_{i+k-1}\},i=1,2,\cdots,k+l$$

其中，这里及以后的下标都是在模 $k+l$ 意义下的. 若将 $y_1,y_2,\cdots,$

y_{k+l} 放在一个圆周上，则集合 A_i 就是所有相邻的 k 个元素构成的集合.

首先证明一个命题.

命题 对于 S 的每个排列，其确定的集合中至少有两个是好的.

命题的证明 对于 $i=1,2,\cdots,k+l$，相邻的集合 A_i 和 A_{i+1} 的元素中只有 y_i 和 y_{i+k} 不同. 由 f 的定义及 $y_i,y_{i+k}\in[0,1]$，有

$$|f(A_{i+1})-f(A_i)|=\left|\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{l}\right)(y_{i+k}-y_i)\right|\leqslant\frac{1}{k}+\frac{1}{l}=2d$$

每一个元素 $y_i\in S$ 恰属于 $A_1,A_2,\cdots,A_{k+l}$ 中的 k 个集合. 于是，在 $f(A_1),f(A_2),\cdots,f(A_{k+l})$ 中的 k 个表达式中，y_i 的系数为 $\frac{1}{k}$，余下的 l 个表达式中，y_i 的系数为 $-\frac{1}{l}$.

因此，在所有 $f(A_i)$ 的和中，y_i 的系数为

$$k\cdot\frac{1}{k}-l\cdot\frac{1}{l}=0$$

因为对于所有的 i，关于 y_i 的结论都成立，所以

$$\sum_{i=1}^{k+l}f(A_i)=0$$

设

$$f(A_p)=\min_{1\leqslant i\leqslant k+l}\{f(A_i)\},f(A_q)=\max_{1\leqslant i\leqslant k+l}\{f(A_i)\}$$

则

$$f(A_p)\leqslant 0,f(A_q)\geqslant 0$$

若 $p<q$（$p>q$ 的情形类似，$p=q$ 情形可得对于所有的 i，$f(A_i)=0$，命题成立），可证明：$A_1,A_2,\cdots,A_{k+l}$ 中至少有两个是好的.

区间 $[-d,d]$ 的长度为 $2d$.

将 $f(A_1),f(A_2),\cdots,f(A_{k+l})$ 放在一个圆周上，则相邻两项差的绝对值最多是 $2d$.

若

$$f(A_p)<-d,f(A_q)>d$$

则 $f(A_{p+1}),f(A_{p+2}),\cdots,f(A_{q-1})$ 中一定有一项在区间 $[-d,d]$ 中，$f(A_{q+1}),f(A_{q+2}),\cdots,f(A_{p-1})$ 中也一定有一项在区间 $[-d,d]$ 中. 因此，$A_{p+1},A_{p+2},\cdots,A_{q-1}$ 中有一个是好的，$A_{q+1},A_{q+2},\cdots,A_{p-1}$ 中有一个是好的.

若

$$f(A_p)\geqslant -d,f(A_q)\leqslant d$$

则 A_p,A_q 都是好的.

若

$$f(A_p) < -d, f(A_q) \leqslant d$$

则

$$f(A_p) + f(A_q) < 0$$

由

$$\sum_{i=1}^{k+l} f(A_i) = 0$$

知存在 $r \neq q$,使得

$$f(A_r) > 0$$

则

$$0 < f(A_r) \leqslant f(A_q) \leqslant d$$

于是,集合 A_r 和 A_q 是好的.

类似地,当

$$f(A_p) \geqslant -d, f(A_q) > d$$

时,仍有 $A_1, A_2, \cdots, A_{k+l}$ 中有两个是好的.

回到原题.

对 $S=\{x_1, x_2, \cdots, x_{k+l}\}$ 的 $(k+l)!$ 个排列中的每一个,应用命题可知至少有 $2(k+l)!$ 个好的子集,其中有重复计算.每个好的集合被重复计算的次数等于这个集合被多少个 S 的排列确定.

另一方面,每一个 k 元集合 $A \subset S$ 恰被 $(k+l)k!\ l!$ 这个排列确定.

事实上,这个排列 $(y_1, y_2, \cdots, y_{k+l})$ 依赖于三个独立的选择:一是下标 $i \in \{1,2,\cdots,k+l\}$,其确定了集合

$$A = \{y_i, y_{i+1}, \cdots, y_{i+k-1}\}$$

二是集合 A 的排列

$$(y_i, y_{i+1}, \cdots, y_{i+k-1})$$

三是集合 $\frac{S}{A}$ 的排列

$$(y_{i+k}, y_{i+k+1}, \cdots, y_{i-1})$$

综上,至少有

$$\frac{2(k+l)!}{(k+l)k!\ l!} = \frac{1}{k+l} C_{k+l}^{k}$$

个好的集合.

6 对于正整数 $n \geqslant 2$,设 $S_1, S_2, \cdots, S_{2^n}$ 是集合 $A=\{1,2,3,\cdots,2^{n+1}\}$ 的 2^n 个子集,且满足下列性质:不存在下标 a,b $(a<b)$ 和 $x,y,z \in A(x<y<z)$,使得 $y,z \in S_a$,$x,z \in S_b$.证明:$S_1, S_2, \cdots, S_{2^n}$ 中至少有一个包含不超过 $4n$ 个元素.

证明 我们证明:存在一个集合 S_a 最多有 $3n+2$ 个元素.

给定一个 $k \in \{1,2,\cdots,n\}$. 如果 $z \in S_a$，且 S_a 包含两个其他元素 x,y，满足

$$x < y < z$$

及

$$z - y < 2^k, z - x \geqslant 2^k$$

则称元素 $z \in A$ 对于集合 S_a 是"k— 好的". 如果对于某个 $k=1,2,\cdots,n$，z 对于 S_a 是 k— 好的，则称 $z \in A$ 对于 S_a 是"好的".

首先证明：第一个 $z \in A$ 最多对一个集合 S_a 是 k— 好的.

事实上，假设 z 对于集合 $S_a, S_b (a < b)$ 都是 k— 好的. 则存在

$$y_a \in S_a, y_a < z$$

及

$$x_b \in S_b, x_b < z$$

使得

$$z - y_a < 2^k, z - x_b \geqslant 2^k$$

另一方面，因为

$$z \in S_a \cap S_b$$

并由条件可知在开区间 (x_b, z) 中没有 S_a 中的元素，所以

$$y_a \leqslant x_b$$

即

$$z - y_a \geqslant z - x_b$$

这与

$$z - y_a < 2^k, z - x_b \geqslant 2^k$$

矛盾.

因此，对于一个固定的 $z \in A$，最多对于 n 个集合是好的（对于每个 $k=1,2,\cdots,n$，最多有一个集合是好的）.

此外，设

$$u_1 < u_2 < \cdots < u_m < \cdots < u_p$$

是一个固定集合 S_a 中所有对于 S_a 不是好的元素.

接下来证明：

对于所有的 $m \geqslant 3$，有

$$u_m - u_1 > 2(u_{m-1} - u_1)$$

事实上，假设对于某个 $m \geqslant 3$，有

$$u_m - u_1 \leqslant 2(u_{m-1} - u_1)$$

则这个不等式也可以写成

$$2(u_m - u_{m-1}) \leqslant u_m - u_1$$

由于存在唯一的正整数 k，使得

$$2^k \leqslant u_m - u_1 < 2^{k+1}$$

因此

$$2(u_m - u_{m-1}) \leqslant u_m - u_1 < 2^{k+1}$$

从而

$$u_m - u_{m-1} < 2^k$$

但是元素

$$z = u_m, x = u_1, y = u_{m-1}$$

属于 S,且满足

$$x < y < z$$

并且

$$z - y < 2^k, z - x \geqslant 2^k$$

于是,$z = u_m$ 对于 S_a 是 k— 好的,矛盾.

因此,数列

$$u_2 - u_1, u_3 - u_1, \cdots, u_p - u_1$$

中的每一项(非第一项)都大于其前一项的 2 倍,从而

$$u_p - u_1 > 2^{p-2}(u_2 - u_1) \geqslant 2^{p-2}$$

因为

$$u_p \in \{1,2,3,\cdots,2^{n+1}\}$$

所以

$$u_p \leqslant 2^{n+1}$$

从而

$$p - 2 < n + 1$$

即

$$p \leqslant n + 2$$

因此,每个集合 S_a 最多有 $n+2$ 个元素对于 S_a 是不好的.

综上所述,将 S_a 中所有对于 S_a 是好的元素染为红色,不是好的元素染为蓝色,则所有红的元素(计算重数)最多有 $n \cdot 2^{n+1}$(每个 $z \in A$ 最多在 n 个集合中被染为红色)个,所有蓝的元素最多有 $(n+2)2^n$(每个集合 S_a 最多有 $n+2$ 个蓝的元素)个.

因此,$S_1, S_2, \cdots, S_{2^n}$ 的元素数目的和不超过 $(3n+2)2^n$. 从而,至少有一个集合(元素数目最少的那个集合)的元素的数目最多有 $3n+2$ 个.

几何部分

1 已知 H 是锐角三角形 ABC 的垂心,以边 BC 的中点为圆心,过点 H 的圆与直线 BC 相交于两点 A_1, A_2;以边 CA 的中点为圆心,过点 H 的圆与直线 CA 相交于两点 B_1, B_2;以边 AB 的中点为圆心,过点 H 的圆与直线 AB 相交于两点 C_1, C_2.

证明:六点 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ 共圆.

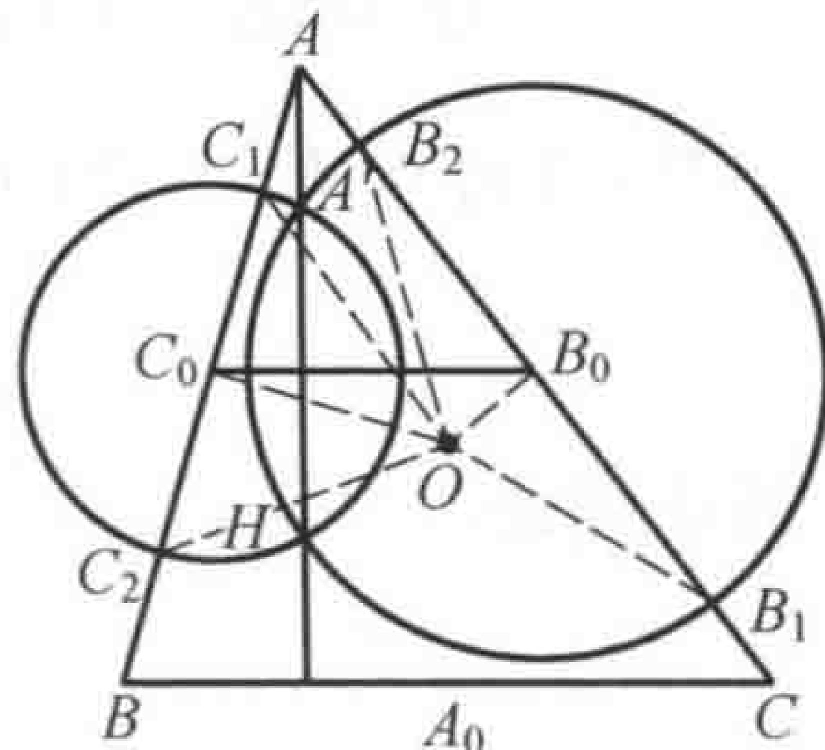


图 49.8

证明　此题答案与本届 IMO 试题的第 1 题答案相同.

2 已知梯形 $ABCD$ 满足 $AB \parallel CD$，在 CB 的延长线上有一点 E，在线段 AD 上有一点 F，使得 $\angle DAE = \angle CBF$. 设直线 CD，AB 与 EF 分别交于点 I，J，线段 EF 的中点为 K，且 K 不在直线 AB 上. 证明：点 I 在 $\triangle ABK$ 的外接圆上的充分必要条件是点 K 在 $\triangle CDJ$ 的外接圆上.

证明　如图 49.9. 因

$$\angle EBF = 180^\circ - \angle CBF = 180^\circ - \angle EAF$$

所以，四边形 $AEBF$ 是圆内接四边形.

于是

$$AJ \cdot JB = FJ \cdot JE$$

因此，点 I 在 $\triangle ABK$ 的外接圆上的充分必要条件是

$$IJ \cdot JK = FJ \cdot JE$$

又

$$IJ = IF + FJ, JE = EF - FJ, JK = \frac{1}{2}FE - FJ$$

则点 I 在 $\triangle ABK$ 的外接圆上的充分必要条件是

$$FJ = \frac{IF \cdot FE}{2IF + FE}$$

因为 A, E, B, F 四点共圆，且

$$AB \parallel CD$$

所以

$$\angle FEC = \angle FAB = 180^\circ - \angle CDF$$

故四边形 $CDFE$ 是圆内接四边形.

因此

$$ID \cdot IC = IF \cdot IE$$

从而，可得点 K 在 $\triangle CDJ$ 的外接圆上的充分必要条件是

$$IJ \cdot IK = IF \cdot IE$$

由于

$$IJ = IE + FJ, IK = IF + \frac{1}{2}FE, IE = IF + FE$$

于是，可得点 K 在 $\triangle CDJ$ 的外接圆上的充分必要条件是

$$FJ = \frac{IF \cdot FE}{2IF + FE}$$

结论得证.

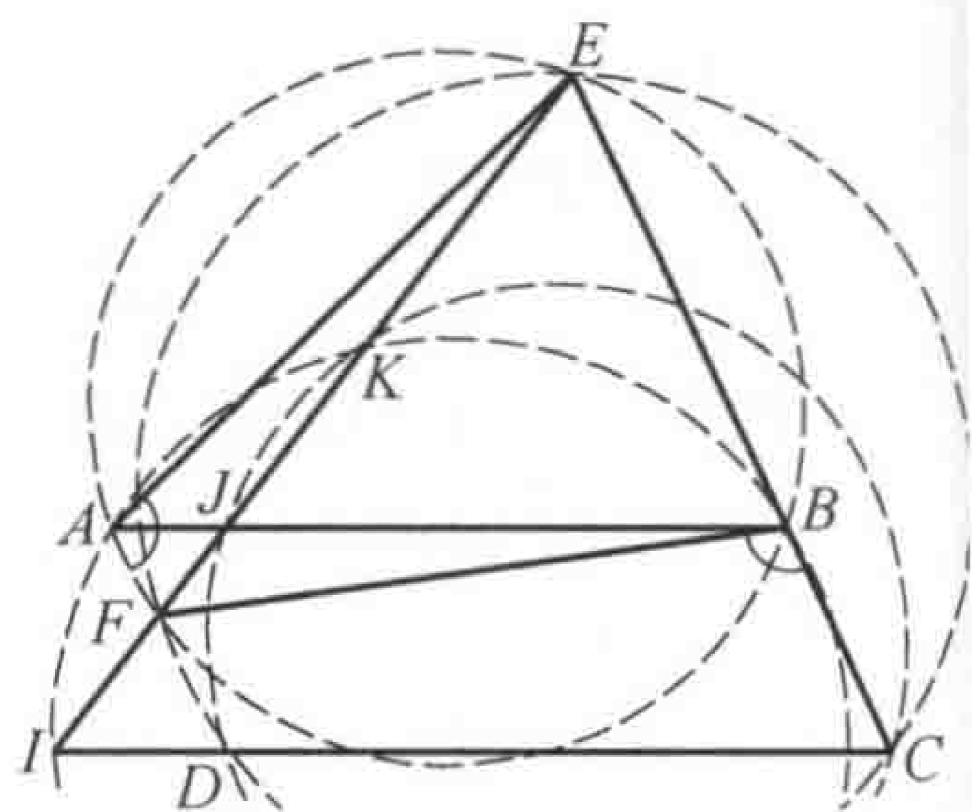


图 49.9

3 设 P,Q 是凸四边形 $ABCD$ 内的两点，且满足四边形 $PQDA$ 和四边形 $QPBC$ 均为圆内接四边形. 若在线段 PQ 上存在一点 E，使得

$$\angle PAE=\angle QDE,\angle PBE=\angle QCE$$

证明：四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形.

证法 1　如图 49.10.

设 F 是直线 AD 上的点，且满足

$$FE \parallel PA$$

若点 F 在 A,D 之间，由四边形 $PQDA$ 是圆内接四边形得

$$\angle EFD=\angle PAD=180^\circ-\angle EQD$$

于是，四边形 $EFDQ$ 为圆内接四边形.

若点 D 在 A,F 之间，则

$$\angle EFD=\angle EQD$$

因此，四边形 $EDFQ$ 为圆内接四边形.

无论哪种情况，均有

$$\angle EFQ=\angle EDQ=\angle PAE$$

从而

$$FQ \parallel AE$$

于是，$\triangle EFQ$ 与 $\triangle PAE$ 要么位似，要么全等.

同理，设 G 为直线 BC 上的点，且满足

$$EG \parallel PB$$

则 $\triangle EGQ$ 与 $\triangle PBE$ 要么位似，要么全等.

若

$$PE\neq QE$$

则 $\triangle EFQ$ 与 $\triangle PAE$ 的位似中心和 $\triangle EGQ$ 与 $\triangle PBE$ 的位似中心相同.

于是，AF,PE,BG 三线交于一点 X，即 AD,PQ,BC 三线交于一点 X.

又因为四边形 $PQDA$ 和四边形 $QPBC$ 为圆内接四边形，所以

$$XA\cdot XD=XP\cdot XQ=XB\cdot XC$$

即四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形.

若 $PE=QE$，则

$$AD \parallel PQ \parallel BC$$

于是，四边形 $PQDA$ 和四边形 $QPBC$ 均为等腰梯形.

从而，四边形 $ABCD$ 为等腰梯形. 因此，四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形.

证法2 用另外一种方法证明 AD, BC, PQ 要么交于一点,要么互相平行.

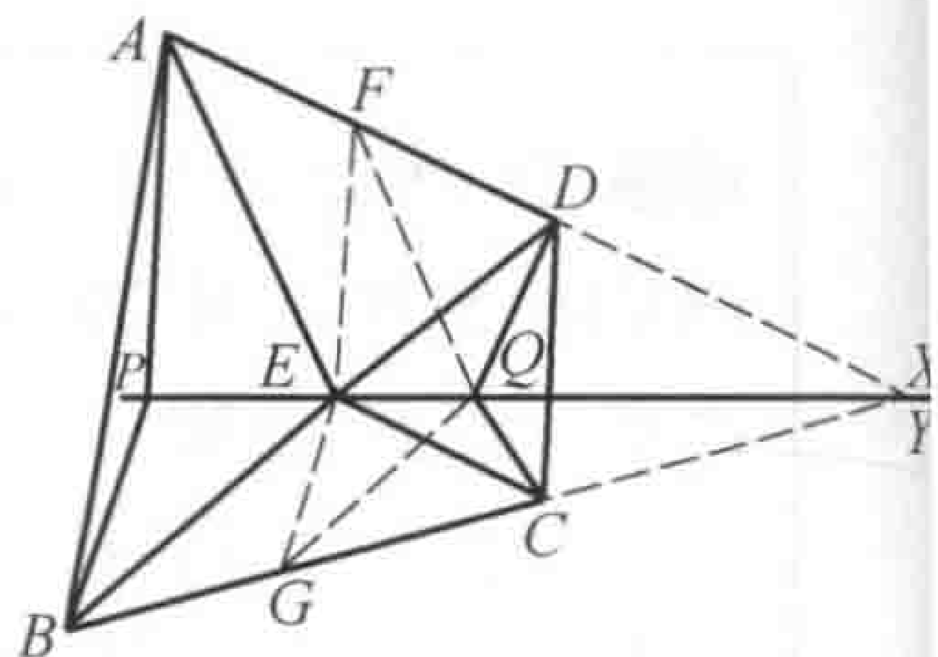


图 49.10

由四边形 $PQDA$ 是圆内接四边形,知

$$\angle PAD = 180^\circ - \angle PQD$$

所以

$$\angle QDE + \angle QED = \angle PAE + \angle QED$$

故

$$\angle QED = \angle PAD - \angle PAE = \angle EAD$$

这表明 PQ 与 $\triangle EAD$ 的外接圆切于点 E.

假设 AD 与 PQ 交于点 X. 由切割线定理得

$$XE^2 = XA \cdot XD$$

又因为

$$XA \cdot XD = XP \cdot XQ$$

所以

$$XE^2 = XP \cdot XQ$$

若 BC 与 PQ 交于点 Y,同理可得

$$YE^2 = YP \cdot YQ$$

故 $X = Y$,即 AD, BC, PQ 三线交于一点.

若

$$BC \parallel PQ$$

则四边形 $QPBC$ 为等腰梯形. 由

$$\angle PBE = \angle QCE$$

可得 E 是 PQ 的中点,这与

$$XE^2 = XP \cdot XQ$$

矛盾.

类似地可得

$$AD \parallel PQ \parallel BC$$

的情形. 同证法 1.

> **4** 已知 BE, CF 是锐角 $\triangle ABC$ 的高,过点 A, F 的两个圆与直线 BC 分别切于点 P, Q,且点 B 在 C, Q 之间. 证明:PE, QF 的交点在 $\triangle AEF$ 的外接圆上.

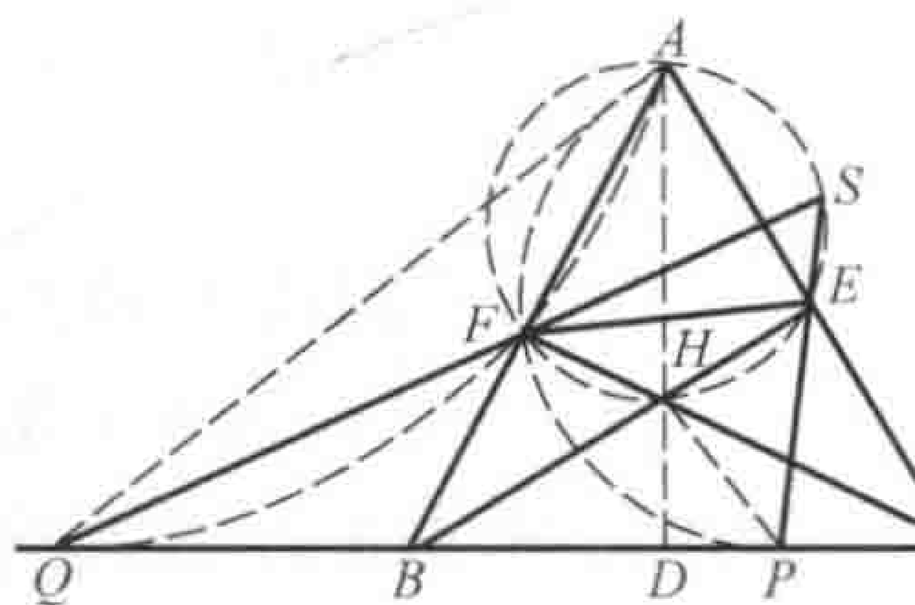


图 49.11

证明 因为

$$BP^2 = BF \cdot BA = BQ^2$$

所以

$$BP = BQ$$

如图 49.11,设 BE, CF 交于点 H,则 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心. 联结 AH 与 BC 交于点 D,则

$$AD \perp BC$$

于是，四边形 $CDFA$、四边形 $CDHE$ 均为圆内接四边形. 从而

$$BA \cdot BF = BC \cdot BD = BE \cdot BH$$

因此

$$BP^2 = BE \cdot BH \Rightarrow \frac{BP}{BH} = \frac{BE}{BP}$$

这表明

$$\triangle BPH \backsim \triangle BEP$$

从而

$$\angle BPE = \angle BHP \qquad ①$$

由

$$BP^2 = BC \cdot BD$$

可知点 P 在 C，D 之间. 因此

$$\begin{aligned} DP \cdot DQ = &(BP - BD)(BQ + BD) = \\ &(BP - BD)(BP + BD) = \\ &BP^2 - BD^2 \Rightarrow BD(BC - BD) = \\ &BD \cdot DC \end{aligned}$$

又因为

$$\triangle BDH \backsim \triangle ADC$$

所以

$$AD \cdot DH = BD \cdot DC$$

因此

$$AD \cdot DH = DP \cdot DQ \Rightarrow \frac{DH}{DP} = \frac{DQ}{DA}$$

这表明

$$\triangle HDP \backsim \triangle QDA$$

从而

$$\angle BPH = \angle DPH = \angle DAQ = \angle BAD + \angle BAQ$$

因为 BQ 与 $\triangle FAQ$ 的外接圆相切，所以

$$\angle BQF = \angle BAQ = \angle BPH - \angle BAD \qquad ②$$

由式 ①，② 得

$$\begin{aligned} \angle BPE + \angle BQF = &\angle BHP + \angle BPH - \angle BAD = \\ &180^\circ - \angle PBH - \angle BAD = \\ &180^\circ - (90^\circ - \angle BCA) - \\ &(90^\circ - \angle ABC) = \\ &\angle BCA + \angle ABC = \\ &180^\circ - \angle CAB \end{aligned}$$

于是

$$\angle BPE + \angle BQF < 180^\circ$$

即 PE 与 QF 相交.

设交点为 S,则

$\angle PSQ=180^{\circ}-(\angle BPE+\angle BQF)=\angle CAB=\angle EAF$

若点 S 在 P,E 之间,则

$$\angle PSQ=180^{\circ}-\angle ESF$$

若点 E 在 P,S 之间,则

$$\angle PSQ=\angle ESF$$

无论哪种情形,均有

$$\angle PSQ=\angle EAF$$

从而,点 S 在 $\triangle AEF$ 的外接圆上.

5 已知整数 k,n 满足 $0\leqslant k\leqslant n-2$. 考虑平面上的 n 条直线的集合 L,使得任意两条直线不平行,任意三条直线不共点. 设 L 中的直线的交点的集合为 I,O 为不在 L 中任何一条直线上的一点. 若 $X\in I$,且开线段(不含端点)OX 最多与 L 中的 k 条直线相交,则将 X 染为红色. 证明:集合 I 中至少有 $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ 个红点.

证明 对于每一点 $P\in I$,定义它的阶为 L 中与开线段 OP 相交的直线的数目.

由定义可知,若点 P 的阶最多为 k,则 P 为红色.

先证明:至少有一个点 $X\in I$,其阶为 0.

事实上,L 中的直线将平面分成若干个(有界或无界)区域,O 属于其中的一个区域. 对于这个区域中的任意一个顶点都是 I 中的点,这个点的阶为 0.

接下来证明:若点 $P,Q\in I$ 在 L 中的同一条直线上,且 L 中的其他直线均不与开线段 PQ 相交,则点 P,Q 的阶最多差 1.

事实上,设 P,Q 的阶分别为 p,q,且 $p\geqslant q$. 考虑 $\triangle OPQ$. p 是与边 OP 的内部相交的 L 中的直线的数目,且这些直线均不与边 PQ 的内部相交,最多有一条过点 Q,而其他的直线一定与边 OQ 的内部相交,这表明

$$q\geqslant p-1$$

下面对 k 用数学归纳法.

当 $k=0$ 时,由于有一个点的阶为 0,这个点为红色的,结论成立.

假设 $k-1$ 时结论成立,下面考虑 k 时的情形.

选一个点 $P\in I$,其阶为 0,考虑过点 P 且属于 L 的一条直线 l,则 l 上有 $n-1$ 个交点,且其中的一个点为 P.

由前面证明的结论知，在其他 $n-2$ 个点中最靠近点 P 的 k 个交点的阶不超过 k.

因此，直线 l 上最少有 $k+1$ 个红点.

去掉直线 l，也包括 l 上的所有交点.

由归纳假设，阶不超过 $k-1$ 的点最少有 $\frac{1}{2}k(k+1)$ 个. 再将 l 放回去，则 l 和 O 与交点所连开线段最多有一个新的交点. 于是，这些点的阶最多为 k. 因此，阶不超过 k 的点的数目至少为

$$(k+1)+\frac{1}{2}k(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

6 已知凸四边形 $ABCD$. 证明：在四边形 $ABCD$ 的内部存在一点 P，使得

$$\angle PAB+\angle PDC=\angle PBC+\angle PAD=\angle PCD+\angle PBA=\angle PDA+\angle PCB=90^\circ \quad ①$$

的充分必要条件是对角线 AC 与 BD 垂直(图 49.12).

证明 若 P 是四边形 $ABCD$ 内满足式 ① 的点，设 P 在 AB，BC，CD，DA 上的投影分别为 K，L，M，N.

因为式 ① 中的角都是锐角，所以，K，L，M，N 是 AB，BC，CD，DA 内部的点.

由四边形 $AKPN$，四边形 $DNPM$ 为圆内接四边形，有

$$\angle PAB+\angle PDC=\angle PNK+\angle PNM=\angle KNM$$

同理

$$\angle PBC+\angle PAD=\angle LKN$$
$$\angle PCD+\angle PBA=\angle MLK$$

于是，由式 ① 得

$$\angle KNM=\angle LKN=\angle MLK=90^\circ$$

即四边形 $KLMN$ 是矩形.

反之，若在凸四边形 $ABCD$ 内有一点 P，P 在四个边 AB，BC，CD，DA 上的投影 K，L，M，N 所在边的内部，且四边形 $KLMN$ 为矩形，则点 P 满足式 ①.

(1) 假设在四边形 $ABCD$ 内存在一点 P，使得 P 在 AB，BC，CD，DA 上的投影 K，L，M，N 是一个矩形的四个顶点.

下面证明：AC 和 BD 分别平行于矩形的两边.

设 O_A，O_C 分别为四边形 $AKPN$，四边形 $CMPL$ 的外接圆的圆心. 则 O_A，O_C 分别在 NK，ML 的中垂线上.

因为 NK 和 ML 的中垂线是同一条直线，所以，O_AO_C 为 NK

和 ML 的公共中垂线.

因此

$$O_AO_C \parallel KL \parallel MN$$

另一方面,O_AO_C 是 $\triangle ACP$ 中平行于 AC 的中位线. 于是

$$AC \parallel KL$$

同理

$$BD \parallel ML$$

从而

$$AC \perp BD$$

(2) 假设

$$AC \perp BD$$

AC 与 BD 交于点 R. 若四边形 $ABCD$ 是菱形,取 $P=R$. 即能保证四边形 $KLMN$ 为矩形,假设四边形 $ABCD$ 不是菱形,不失一般性,设

$$BR < DR$$

设 $\triangle ABD$,$\triangle CDB$ 的外心分别为 U_A,U_C,AU_A,CU_C 分别是这两个圆的直径.

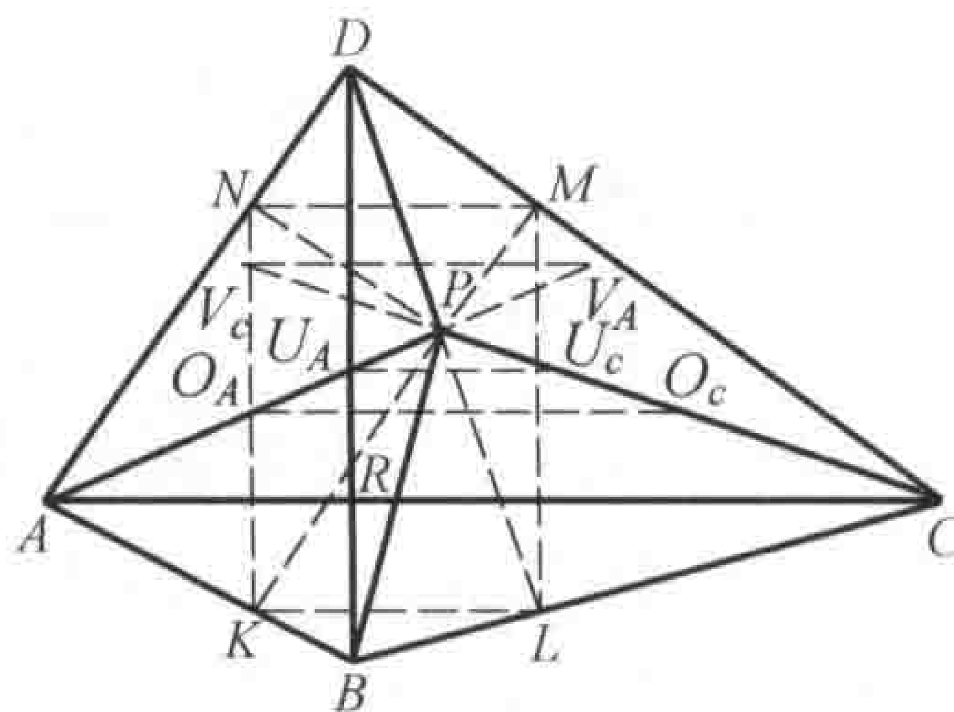


图 49.12

因为 AR 是 $\triangle ADB$ 的高,所以

$$\angle DAV_A = \angle BAC$$

由于

$$BR < DR$$

则 AU_A 在 $\angle DAC$ 内.

同理,CU_C 在 $\angle DCA$ 内.

因为 $\angle ABD$,$\angle ADB$ 均为锐角,所以,AV_A 与 BD 相交.

同理,CV_C 与 BD 相交.

注意到 U_AU_C 是 BD 的中垂线,因此

$$U_AU_C \parallel AC$$

于是

$$V_AV_C \parallel AC$$

且 AV_A 与 CV_C 的交点 P 在 $\triangle ACD$ 的内部,进而在四边形 $ABCD$ 的内部.

设 P 在 AB,BC,CD,DA 上的投影分别为 K,L,M,N,四边形 $AKPN$,四边形 $CMPL$ 的外接圆的圆心分别为 O_A,O_C,则 K,L,M,N 在四条边的内部,且 O_AO_C 是 $\triangle ACP$ 平行于 AC 的中位线. 因此

$$O_AO_C \parallel AC \parallel U_AU_C$$

因四边形 $AKPN$ 是圆内接四边形,所以

$$\angle NKP = \angle NAP = \angle DAU_A = \angle BAC$$

又

$$PK \perp AB$$

则

$$NK \perp AC$$

故

$$NK \parallel BD$$

同理

$$LM \parallel BD$$

注意到$\triangle AKN$与$\triangle ABD$的位似中心为A,O_A与U_A是对应点,$\triangle CML$与$\triangle CDB$的位似中心为C,O_C与U_C是对应点.

因为

$$U_AU_C \parallel O_AO_C \parallel AC$$

所以,两个位似变换的位似比相同,记为

$$\lambda = \frac{AN}{AD} = \frac{AK}{AB} = \frac{AO_A}{AU_A} = \frac{CO_C}{CU_C} = \frac{CM}{CD} = \frac{CL}{CB}$$

于是

$$\frac{DN}{DA} = \frac{DM}{DC} = \frac{BK}{BA} = \frac{BL}{BC} = 1 - \lambda$$

因此

$$KL \parallel AC \parallel MN$$

即四边形 $KLMN$ 是矩形.

7 在凸四边形$ABCD$中,$BA \neq BC$.ω_1和ω_2分别是$\triangle ABC$和$\triangle ADC$的内切圆.假设存在一个圆ω与射线BA相切(切点不在线段BA上),与射线BC相切(切点不在线段BC上),且与直线AD和直线CD都相切.

证明:圆ω_1和ω_2的两条外公切线的交点在圆ω上.

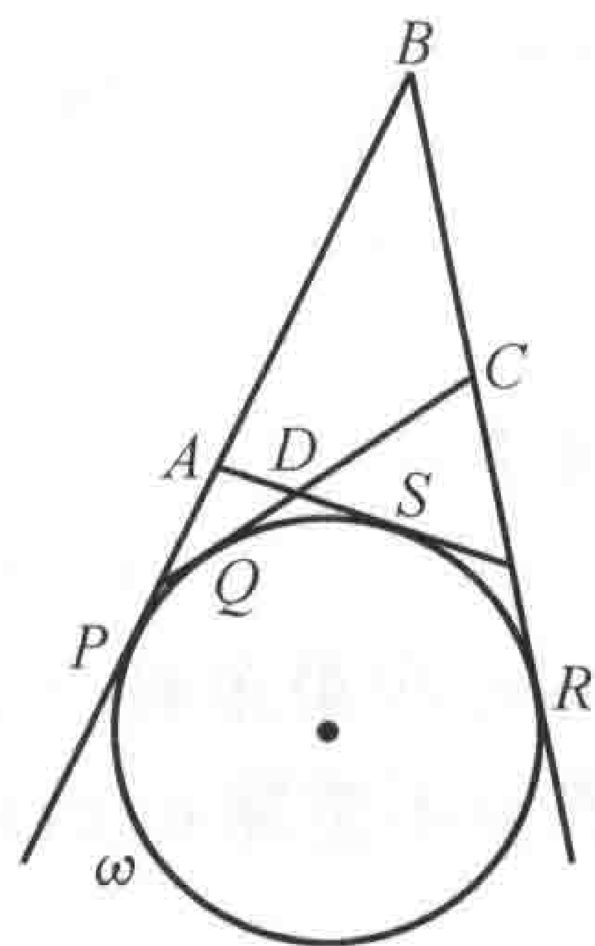


图 49.13

证明 此题答案与本届 IMO 试题的第 6 题答案相同.

数论部分

1 设n是一个正整数,p是一个质数.证明:如果整数a,b,c(不必是正的)满足

$$a^n + pb = b^n + pc = c^n + pa$$

则

$$a = b = c$$

证法 1 若a,b,c中有两个相等,则即得

$$a = b = c$$

若 a,b,c 互不相等,则

$$a^n-b^n=-p(b-c)$$
$$b^n-c^n=-p(c-a)$$
$$c^n-a^n=-p(a-b)$$

故

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}\cdot\frac{b^n-c^n}{b-c}\cdot\frac{c^n-a^n}{c-a}=-p^3 \quad ①$$

若 n 为奇数,则 a^n-b^n 与 $a-b$ 同号,b^n-c^n 与 $b-c$ 同号,c^n-a^n 与 $c-a$ 同号.于是,式 ① 的左边是正的,而右边的 $-p^3$ 是负的,因此,n 一定是偶数.

设 d 是 $a-b,b-c,c-a$ 的最大公因数,且设

$$a-b=du,b-c=dv,c-a=dw$$

则

$$(u,v,w)=1,u+v+w=0$$

由

$$a^n-b^n=-p(b-c)$$

得

$$(a-b)\mid p(b-c)\Rightarrow u\mid pv$$

同理

$$v\mid pw,w\mid pu$$

由于

$$(u,v,w)=1,u+v+w=0$$

则 u,v,w 中最多有一个可以被 p 整除.

若 p 不整除 u,v,w 中的任意一个,则

$$u\mid v,v\mid w,w\mid u$$

于是

$$|u|=|v|=|w|=1$$

这与 $u+v+w=0$ 矛盾.

从而,p 恰整除 u,v,w 中的一个.

不妨假设 $p\mid u$,且 $u=pu_1$.和前面类似可得

$$u_1\mid v,v\mid w,w\mid u_1$$

于是

$$|u_1|=|v|=|w|=1$$

由于

$$pu_1+v+w=0$$

则 p 一定是偶数,即 $p=2$.

因此

$$v+w=-2u_1=\pm 2$$

从而

$$v=w(=\pm 1), u=-2v$$

即

$$a-b=-2(b-c)$$

设 $n=2k$，则方程

$$a^n-b^n=-p(b-c)$$

在 $p=2$ 时化为

$$(a^k+b^k)(a^k-b^k)=-2(b-c)=a-b$$

由于

$$(a-b)\mid(a^k-b^k)$$

则只可能有

$$a^k+b^k=\pm 1$$

因此，a,b 中恰有一项是奇数，这与 $a-b=-2(b-c)$ 是偶数矛盾.

综上，一定有

$$a=b=c$$

证法 2 若 a,b,c 中有两个相等，则即得

$$a=b=c$$

若 a,b,c 互不相等，由证法 1 的式 ① 可知 n 是偶数. 设 $n=2k$.

假设 p 是奇数，则数

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}$$

是式 ① 右边 $-p^3$ 的因数. 因此，是奇数.

又因为其是 $n=2k$ 项的和，所以，a,b 的奇偶性不同.

同理，b,c 和 c,a 的奇偶性分别不同.

因此，a,b 和 c,a 的奇偶性是交替出现的，这是不可能的.

于是，$p=2$. 由原方程可知，a,b,c 的奇偶性相同.

又由式 ① 可得下列的六个整数的乘积等于 -1，则

$$\frac{a^k+b^k}{2}\cdot\frac{a^k-b^k}{a-b}\cdot\frac{b^k+c^k}{2}\cdot\frac{b^k-c^k}{b-c}\cdot\frac{c^k+a^k}{2}\cdot\frac{c^k-a^k}{c-a}=-1 \quad ②$$

因此，每个因数都是 ± 1.

特别地，有

$$a^k+b^k=\pm 2$$

若 k 是偶数，则

$$a^k+b^k=2$$

从而

$$|a|=|b|=1, a^k-b^k=0$$

与式 ② 矛盾.

若 k 是奇数，则 $a+b$ 是 $a^k+b^k=\pm 2$ 的因数.

因为 a,b 的奇偶性相同,所以

$$a+b=\pm 2$$

同理

$$b+c=\pm 2, c+a=\pm 2$$

由于一定有两项的符号相同,故 a,b,c 中一定有两项相等,这与 a,b,c 互不相等矛盾.

2 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 3)$ 是不同的正整数.证明:存在不同的下标 i,j,使得 a_i+a_j 不整除 $3a_1,3a_2,\cdots,3a_n$ 中的任何一项.

证明 不失一般性,设

$$0<a_1<a_2<\cdots<a_n$$

且假设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最大公因数为 1. 否则,除以这个最大公因数,所得数列的最大公因数为 1,且与原命题的结论等价.

若结论不正确,则对于每个 $i(i<n)$,存在一个 j,使得

$$(a_n+a_i)\mid 3a_j$$

若

$$3\nmid(a_n+a_i)$$

则

$$(a_n+a_i)\mid a_j$$

由于

$$0<a_j\leqslant a_n<a_n+a_i$$

这是不可能的,因此,对于所有的 $i(i=1,2,\cdots,n-1)$,a_n+a_i 是 3 的倍数.于是,$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 模 3 与 $-a_n$ 同余.

由于 $3\nmid a_n$(否则,由 $3\mid a_n$ 可得,对所有的 $i(i=1,2,\cdots,n-1)$,有 $3\mid a_i$,与 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最大公因数为 1 矛盾),设

$$a_n\equiv r(\bmod 3), r\in\{1,2\}$$

于是,对于所有的 $i(i=1,2,\cdots,n-1)$,有

$$a_i\equiv 3-r(\bmod 3)$$

考虑和 $a_{n-1}+a_i(1\leqslant i\leqslant n-2)$.

当 $n\geqslant 3$ 时,这样的和至少有一项,于是,存在下标 j,使得 $a_{n-1}+a_i$ 整除 $3a_j$.

因为

$$a_{n-1}+a_i\equiv 2a_i\not\equiv 0(\bmod 3)$$

即

$$3\nmid(a_{n-1}+a_i)$$

所以

$$(a_{n-1}+a_i) \mid a_j$$

特别地,有

$$a_{n-1}+a_i \leqslant a_j$$

于是

$$a_{n-1}<a_j \leqslant a_n$$

从而,$j=n$.

因此,a_n 被所有的和 $a_{n-1}+a_i(1 \leqslant i \leqslant n-2)$ 整除.

特别地

$$a_{n-1}+a_i \leqslant a_n, i=1,2,\cdots,n-2$$

设下标 j 满足

$$(a_n+a_{n-1}) \mid 3a_j$$

若

$$j \leqslant n-2$$

则

$$a_n+a_{n-1} \leqslant 3a_j<a_j+2a_{n-1}$$

从而

$$a_n<a_{n-1}+a_j$$

可是,对于所有的 $j(j \leqslant n-2)$,都有

$$a_{n-1}+a_j \leqslant a_n$$

矛盾.

若 $j=n-1$,则

$$3a_{n-1}=k(a_n+a_{n-1})$$

其中,k 是一个整数.于是,$k=1$($k \leqslant 0$ 和 $k \geqslant 3$ 均与 $0<a_{n-1}<a_n$ 矛盾;$k=2$ 可得 $a_{n-1}=2a_n>a_{n-1}$ 矛盾).

由

$$3a_{n-1}=a_n+a_{n-1}$$

可得

$$a_n=2a_{n-1}$$

若 $j=n$,则

$$3a_n=k(a_n+a_{n-1})$$

其中,k 是一个整数.于是,$k=2$.从而

$$a_n=2a_{n-1}$$

则

$$\frac{a_n}{2}<a_{n-1}+a_1<a_n$$

当 $n \geqslant 3$ 时,a_{n-1} 与 a_1 不同,且由前面得到的结论知

$$(a_{n-1}+a_1) \mid a_n$$

这是不可能的.

由此矛盾可知原命题成立.

3 设正整数数列 $a_0,a_1,\cdots$ 满足任意相邻的两项的最大公因数大于它们前面的一项，即 $(a_i,a_{i+1})>a_{i-1}$. 证明：对于所有的非负整数 n，有 $a_n\geqslant 2^n$.

证明 因

$$a_i\geqslant(a_i,a_{i+1})>a_{i-1}$$

所以，数列是严格递增的. 特别地

$$a_0\geqslant 1,a_1\geqslant 2$$

对于每个 $i\geqslant 1$，有

$$a_{i+1}-a_i\geqslant(a_i,a_{i+1})>a_{i-1}$$

于是

$$a_{i+1}\geqslant a_i+a_{i-1}+1$$

故

$$a_2\geqslant 4,a_3\geqslant 7$$

若 $a_3=7$，由

$$(a_2,a_3)=(4,7)=1>a_1=2$$

可得矛盾. 因此，$a_3\geqslant 8$.

下面用数学归纳法证明.

当 $n=0,1,2,3$ 时，结论成立.

假设当 $n\geqslant 3$ 时，有

$$a_i\geqslant 2^i,i=0,1,\cdots,n$$

接下来证明

$$a_{n+1}\geqslant 2^{n+1}$$

设

$$(a_n,a_{n+1})=d$$

则

$$d>a_{n-1}$$

若 $a_{n+1}\geqslant 4d$，则

$$a_{n+1}>4a_{n-1}\geqslant 4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$$

若 $a_n\geqslant 3d$，则

$$a_{n+1}\geqslant a_n+d\geqslant 4d>4a_{n-1}\geqslant 4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$$

若 $a_n=d$，则

$$a_{n+1}\geqslant a_n+d=2a_n\geqslant 2\times 2^n=2^{n+1}$$

接下来的可能情况是 $a_n=2d$，且 $a_{n+1}=3d$. 于是

$$a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n$$

设 $(a_{n-1},a_n)=d'$，则

$$d'>a_{n-2}$$

设

$$a_n = md', m \in \mathbf{N}_+$$

由

$$d' \leqslant a_{n-1} < d$$

及

$$a_n = 2d$$

可得

$$m \geqslant 3$$

因为

$$a_{n-1} < d = \frac{a_n}{2} = \frac{md'}{2}, a_{n+1} = \frac{3}{2}md'$$

所以,可得下面的结论:

若 $m \geqslant 6$,则

$$a_{n+1} = \frac{3}{2}md' \geqslant 9d' > 9a_{n-2} \geqslant 9 \times 2^{n-2} > 2^{n+1}$$

若 $3 \leqslant m \leqslant 4$,则

$$a_{n-1} < \frac{1}{2}md' \leqslant \frac{1}{2} \times 4d' = 2d'$$

于是

$$a_{n-1} = d'$$

$$a_{n+1} = \frac{3}{2}ma_{n-1} \geqslant \frac{3}{2} \times 3a_{n-1} \geqslant \frac{9}{2} \times 2^{n-1} \geqslant 2^{n+1}$$

最后剩下 $m=5$ 的情况.

此时

$$a_n = 5d', a_{n+1} = \frac{15}{2}d', a_{n-1} < d = \frac{5}{2}d'$$

最后一个不等式表明 a_{n-1} 要么等于 d',要么等于 $2d'$,因此,总有

$$a_{n-1} \mid 2d'$$

同样的方式再来一次.

设

$$(a_{n-2}, a_{n-1}) = d''$$

则

$$d'' > a_{n-3}$$

因为 d'' 是 a_{n-1} 的因数,a_{n-1} 又是 $2d'$ 的因数,所以,设

$$2d' = m'd'', m' \in \mathbf{N}_+$$

由

$$d'' \leqslant a_{n-2} < d'$$

可得

$$m' \geqslant 3$$

于是

$$a_{n-2} < d' = \frac{m'd''}{2}, a_{n+1} = \frac{15}{2}d' = \frac{15}{4}m'd''$$

若 $m' \geqslant 5$，则

$$a_{n+1} = \frac{15}{4}m'd'' \geqslant \frac{75}{4}d'' > \frac{75}{4}a_{n-3} \geqslant \frac{75}{4} \times 2^{n-3} > 2^{n+1}$$

若 $3 \leqslant m' \leqslant 4$，则

$$a_{n-1} < \frac{1}{2}m'd'' \leqslant \frac{1}{2} \times 4d'' = 2d''$$

于是

$$a_{n-2} = d''$$

$$a_{n+1} = \frac{15}{4}m'a_{n-2} \geqslant \frac{15}{4} \times 3a_{n-2} \geqslant \frac{45}{4} \times 2^{n-2} > 2^{n+1}$$

综上，总有

$$a_{n+1} \geqslant 2^{n+1}$$

因此，对于所有的非负整数 n，有

$$a_n \geqslant 2^n$$

4 设 n 是一个正整数. 证明：$C_{2^n-1}^0, C_{2^n-1}^1, \cdots, C_{2^n-1}^{2^{n-1}-1}$ 模 2^n 与 $1, 3, \cdots, 2^n-1$ 的某一排列同余.

证明 由于 $C_{2^n-1}^0, C_{2^n-1}^1, \cdots, C_{2^n-1}^{2^{n-1}-1}$ 为奇数是熟知的，因此，要证明它们模 2^n 是$\{1, 3, \cdots, 2^n-1\}$ 的一个排列，只要证明它们模 2^n 的余数互不相同.

先证明

$$C_{2^n-1}^{2k} + C_{2^n-1}^{2k+1} \equiv 0 \pmod{2^n}$$

和

$$C_{2^n-1}^{2k} \equiv (-1)^k C_{2^{n-1}-1}^k \pmod{2^n} \quad ①$$

事实上

$$C_{2^n-1}^{2k} + C_{2^n-1}^{2k+1} = C_{2^n}^{2k+1} = \frac{2^n}{2k+1}C_{2^n-1}^{2k} \equiv 0 \pmod{2^n}$$

$$C_{2^n-1}^{2k} = \prod_{j=1}^{2k} \frac{2^n-j}{j} = \prod_{i=1}^{k} \frac{2^n-(2i-1)}{2i-1} \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{2^{n-1}-i}{i} \equiv (-1)^k C_{2^{n-1}-1}^k \pmod{2^n}$$

下面对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，结论显然成立.

假设结论对于 $n-1$ 时成立.

接下来证明结论对于 n 时也成立.

设

$$a_k = C_{2^{n-1}-1}^k, b_m = C_{2^n-1}^m$$

由归纳假设知所有的 $a_k(0 \leqslant k \leqslant 2^{n-2})$ 模 2^{n-1} 的余数互不相同，只要证明所有的 $b_m(0 \leqslant m < 2^{n-1})$ 模 2^n 的余数互不相同.

将式 ① 改写为

$$b_{2k} \equiv (-1)^k a_k \equiv -b_{2k+1} (\bmod 2^n) \quad ②$$

将式 ① 中的 n 换为 $n-1$，可得

$$a_{2i+1} \equiv -a_{2i} (\bmod 2^{n-1})$$

于是，若对于某两个整数 $j,k < 2^{n-2}$，有

$$a_k \equiv -a_j (\bmod 2^{n-1})$$

则存在某个整数 i，使得

$$\{j,k\} = \{2i, 2i+1\} \quad ③$$

这是因为由归纳假设对于数列 $\{a_k\}(k < 2^{n-2})$ 中的每一项 a_j，都有唯一的一项 a_k，使得

$$s_j + a_k \equiv 0 (\bmod 2^{n-1})$$

由式 ② 可得

$$b_{4i} \equiv a_{2i} (\bmod 2^n), b_{4i+3} \equiv a_{2i+1} (\bmod 2^n)$$

设

$$M = \{m \mid 0 \leqslant m < 2^{n-1}, m \equiv 0 \text{ 或 } 3 (\bmod 4)\}$$
$$L = \{l \mid 0 \leqslant l < 2^{n-1}, l \equiv 1 \text{ 或 } 2 (\bmod 4)\}$$

则最后的两个同余式可以统一为

$$b_m \equiv a_{\left[\frac{m}{2}\right]} (\bmod 2^n)(m \in M) \quad ④$$

其中，$[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

因为所有的 a_k 模 2^{n-1} 的余数互不相同，所以，它们模 2^n 的余数也互不相同. 从而，对于所有的 $b_m(m \in M)$ 模 2^n 的余数互不相同.

对于每个 $l \in L$，存在唯一的 $m \in M$，使得它们构成的数对有 $\{2k, 2k+1\}$ 的形式.

由式 ② 可知，对于所有的 $l \in L$，b_l 模 2^l 模 2^n 的余数互不相同.

最后证明：不存在 $m \in M, l \in L$，使得

$$b_m \equiv b_l (\bmod 2^n)$$

若不然，设 $m' \in M$，使得 $\{m', l\}$ 有 $\{2k, 2k+1\}$ 的形式.

由式 ② 可得

$$b_{m'} \equiv -b_l (\bmod 2^n)$$

于是

$$b_{m'} \equiv -b_m (\bmod 2^n)$$

因为 m', m 都属于集合 M，由式 ④ 又可得

$$b_{m'} \equiv a_k (\bmod 2^n)$$
$$b_{m'} \equiv a_j (\bmod 2^n)$$

其中

$$k=\left[\frac{m'}{2}\right], j=\left[\frac{m}{2}\right]$$

所以

$$a_j \equiv -a_k (\bmod 2^n)$$

由式 ③ 可知,存在正整数 i,整得

$$j=2i, k=2t+1 \text{ 或 } k=2i, j=2i+1$$

于是

$$a_{2i+1} \equiv -a_{2i} (\bmod 2^n)$$

即

$$C_{2^{n-1}-1}^{2i} + C_{2^{n-1}-1}^{2i+1} \equiv 0 (\bmod 2^n)$$

而左边的和等于

$$C_{2^{n-1}}^{2i+1} = \frac{2^{n-1}}{2i+1} C_{2^{n-1}-1}^{2i}$$

不可能被 2^n 整除,矛盾.

综上,原命题成立.

注 下面给出 $C_{2^n-1}^k$ 是奇数的证明.

当 $k=0$ 时,显然成立.

当 $k \geqslant 1$ 时

$$C_{2^n-1}^k = \frac{2^n-1}{1} \cdot \frac{2^n-2}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{2^n-k}{k}$$

设 $i=2^{\alpha_i}\beta_i (1 \leqslant i \leqslant k)$,其中,$\alpha_i$ 为非负整数,β_i 为奇数.则

$$\frac{2^n-i}{i} = \frac{2^{n-\alpha_i}-\beta_i}{\beta_i}$$

于是,$C_{2^n-1}^k$ 的表达式中的分子分母都是奇数,且 $C_{2^n-1}^k$ 又是整数.则一定是奇数.

5 已知 $\mathbf{N}_+$ 是所有正整数构成的集合.对于每个 $n \in \mathbf{N}_+$,设 n 的所有正因数的数目为 $d(n)$.求满足下列性质的所有函数 $f(f:\mathbf{N}_+ \to \mathbf{N}_+)$.

(1) 对于所有的 $x \in \mathbf{N}_+$,有

$$d(f(x))=x$$

(2) 对于所有的 $x,y \in \mathbf{N}_+$,有

$$f(xy) \mid (x-1)y^{xy-1}f(x)$$

解 存在唯一的一个函数 $f:\mathbf{N}_+ \to \mathbf{N}_+$ 满足条件

$$f(1)=1, f(n)=\prod_{i=1}^{k} p_i^{p_i^{a_i}-1} \quad ①$$

其中

$$n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{a_i}$$

是 $n(n>1)$ 的质因数分解.

直接验证可知,式 ① 定义的函数满足条件. 反之,设函数 f: $\mathbf{N}_+\to\mathbf{N}_+$ 满足条件.

在第一个条件中令 $x=1$,可得

$$d(f(1))=1$$

于是

$$f(1)=1$$

下面证明:对于所有的正整数 n,式 ① 成立.

由第一个条件知,若

$$f(m)=f(n)$$

则

$$m=n$$

后面要用到公式

$$d\left(\prod_{i=1}^{k}p_i^{b_i}\right)=\prod_{i=1}^{k}(b_i+1)$$

其中,$p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是互不相同的质数,$b_1,b_2,\cdots,b_k$ 是正整数,$k\geqslant 1$.

设 p 是一个质数.

因为

$$d(f(p))=p$$

所以,存在一个质数 q,使得

$$f(p)=q^{p-1}$$

特别地,$f(2)=q$ 是一个质数.

接下来证明:对于所有的质数 p,有

$$f(p)=p^{p-1}$$

假设 p 是一个奇质数,且存在质数 q,使得

$$f(p)=q^{p-1}$$

在第二个条件中,先取

$$x=2,y=p$$

再取

$$x=p,y=2$$

可得

$$f(2p)\mid(2-1)p^{2p-1}f(2)=p^{2p-1}f(2)$$

$$f(2p)\mid(p-1)2^{2p-1}f(p)=(p-1)2^{2p-1}q^{p-1}$$

或 $q\neq p$,则奇质数

$$p\nmid(p-1)2^{2p-1}q^{p-1}$$

于是,$p^{2p-1}f(2)$ 和$(p-1)2^{2p-1}q^{p-1}$ 的最大公因数是 $f(2)$ 的

因数.

因此,$f(2p)$ 是质数 $f(2)$ 的因数.

因为 $f(2p)>1$,所以

$$f(2p)=f(2)$$

矛盾.

因此,$q=p$,即

$$f(p)=p^{p-1}$$

若 $p=2$,在第二个条件中,先取

$$x=2,y=3$$

再取

$$x=3,y=2$$

可得

$$f(6)\mid 3^5f(2),f(6)\mid 2^6f(3)=2^6\times 3^2$$

如果质数 $f(2)$ 是奇数,则

$$f(6)\mid 3^2=9$$

即

$$f(6)\in\{1,3,9\}$$

于是

$$6=d(f(6))\in\{d(1),d(3),d(9)\}=\{1,2,3\}$$

矛盾.

因此

$$f(2)=2$$

再证明:对每个 $n>1$,$f(n)$ 的质因数就是 n 的质因数.

事实上,设 p 是 n 的最小的质因数.在第二个条件中,取

$$x=p,y=\frac{n}{p}$$

可得

$$f(n)\mid(p-1)y^{n-1}f(p)=(p-1)y^{n-1}p^{p-1}$$

设 $f(n)=lp$,其中,l 与 n 互质,p 是整除 n 的质数的乘积.

因为

$$l\mid(p-1)y^{n-1}p^{p-1}$$

且 l 与 $y^{n-1}p^{p-1}$ 互质,所以

$$l\mid(p-1)$$

且

$$d(l)\leqslant l<p$$

由第一个条件可得

$$n=d(f(n))=d(lp)$$

且由 l,p 互质,有

$$d(lp)=d(l)d(p)$$

于是，$d(l)$ 是 n 的小于 p 的因数，这意味着 $l=1$.

设 p 是一个质数，$a\geqslant 1$. 由前面得到的结论知 $f(p^a)$ 的质因数只有 p. 因此，存在正整数 b，使得

$$f(p^a)=p^b$$

由第一个条件可知

$$p^a=d(f(p^a))=d(p^b)=b+1$$

于是

$$f(p^a)=p^{p^a-1}$$

下面对于 $n>1$，且 n 的质因数分解为

$$n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{a_i}$$

证明式 ① 成立.

注意到 $f(n)$ 的质因数分解形如

$$f(n)=\prod_{i=1}^{k}p_i^{b_i}$$

对于 $i=1,2,\cdots,k$，在第二个条件中设

$$x=p_i^{a_i},y=\frac{n}{x}$$

则

$$f(n)\mid(p_i^{a_i}-1)y^{n-1}f(p_i^{a_i})$$

于是

$$p_i^{b_i}\mid(p_i^{a_i}-1)y^{n-1}f(p_i^{a_i})$$

因为 $p_i^{b_i}$ 与 $(p_i^{a_i}-1)y^{n-1}$ 互质，所以

$$p_i^{b_i}\mid f(p_i^{a_i})=p_i^{p_i^{a_i}-1}$$

因此

$$b_i\leqslant p_i^{a_i}-1$$

由第一个条件可得

$$\prod_{i=1}^{k}p_i^{a_i}=n=d(f(n))=d(\prod_{i=1}^{k}p_i^{b_i})=\prod_{i=1}^{k}(b_i+1)\leqslant\prod_{i=1}^{k}p_i^{a_i}$$

从而，对于所有的 $i(i=1,2,\cdots,k)$，有

$$b_i=p_i^{a_i}-1$$

因此，式 ① 成立.

6 证明：存在无穷多个正整数 n，使得 n^2+1 有一个大于 $2n+\sqrt{2}n$ 的质因子.

证明 此题答案与本届 IMO 试题的第 3 题答案相同.

第五编
第50届国际数学奥林匹克

第 50 届国际数学奥林匹克题解

德国，2009

澳大利亚命题

1 n 是一个正整数，$a_1,a_2,\cdots,a_k(k\geqslant 2)$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中的不同整数，并且 $n\mid a_i(a_{i+1}-1)$ 对于所有 $i=1,2,\cdots,k-1$ 都成立，证明：$a_k(a_1-1)$ 不能被 n 整除.

证明　由于

$$n\mid a_1(a_2-1)$$

令

$$(n,a_1)=p,q=\frac{n}{p}$$

也是整数，则

$$n=pq$$

并且

$$p\mid a_1,q\mid a_2-1$$

因此

$$(q,a_2)=1$$

由于

$$n=pq\mid a_2\cdot(a_3-1)$$

故

$$q\mid a_3-1$$

同理可得

$$q\mid a_4-1,\cdots$$

因此对于任意 $i\geqslant 2$ 都有

$$q\mid a_i-1$$

特别地，有

$$q\mid a_k-1$$

由于 $p\mid a_1$，故

$$n=pq\mid a_1(a_k-1) \quad ①$$

若结论不成立，则

$$n=pq\mid a_k(a_1-1)$$

与式 ① 相减可得

$$n\mid (a_k-a_1)$$

矛盾.

综上所述,结论成立.

俄罗斯命题

② $\triangle ABC$ 外接圆的圆心为 O,P,Q 分别在线段 CA,AB 上,K,L,M 分别是 BP,CQ,PQ 的中点,圆 Γ 过 K,L,M 并且与 PQ 相切. 证明:$OP = OQ$(图 50.1).

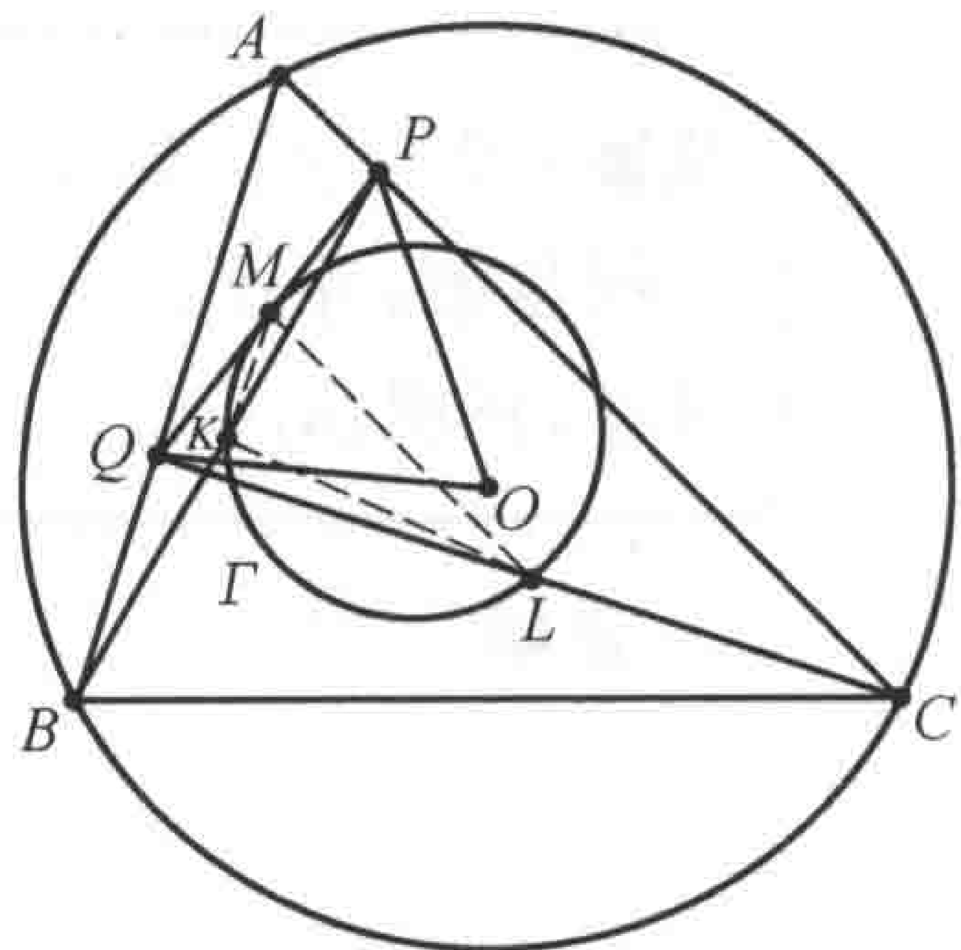


图 50.1

证明 由已知

$$\angle MLK = \angle KMQ = \angle AQP$$
$$\angle MKL = \angle PML = \angle APQ$$

因此

$$\triangle APQ \sim \triangle MKL$$

所以

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{MK}{ML} = \frac{BQ}{CP}$$

故

$$AP \cdot CP = AQ \cdot BQ \qquad ①$$

设圆 O 的半径为 R,则由式 ① 有

$$R^2 - OP^2 = R^2 - OQ^2$$

因此

$$OP = OQ$$

不难发现 $OP = OQ$ 也是圆 Γ 与 PQ 相切的充分条件.

美国命题

③ $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 是严格递增的正整数数列,并且它的子数列 $S_{S_1}, S_{S_2}, S_{S_3}, \cdots$ 和 $S_{S_1+1}, S_{S_2+1}, S_{S_3+1}, \cdots$ 都是等差数列. 证明:$S_1, S_2, S_3, \cdots$ 是一个等差数列.

问题等价于:$f: \mathbf{Z}_+ \to \mathbf{Z}_+$ 是一个严格递增的函数. $b_n = f(f(n))$ 是一个等差数列,$c_n = f(f(n)+1)$ 也是一个等差数列. 证明:$a_n = f(n)$ 也是等差数列.

证明 由于 f 是一个严格递增的整值函数,所以对于任意 x,y 均有

$$| f(x) - f(y) | \geqslant | x - y |$$

令 $\{b_n\}$,$\{c_n\}$ 的公差分别为 d,e,则有

$$d = f(f(n+1)) - f(f(n)) \geqslant f(n+1) - f(n)$$

将 $n \to f(n)$ 可得

$$d \geqslant f(f(n)+1) - f(f(n)) = c_n - b_n > 0$$

因此对于任意 $k \in \mathbf{Z}_+$ 都有

$$d \geqslant c_{1+k} - b_{1+k} = (c_1 - b_1) + k(d-e) > 0$$

故只能有 $d=e$,也即两个等差数列公差相等,故可设

$$c_n - b_n = g$$

是一个常数.

由于

$$d \geqslant f(n+1) - f(n) > 0$$

有界,故 $f(n+1)-f(n)$ 有最大最小值,设 M,m 分别是 $f(n+1)-f(n)$ 的最大、最小值.则对任意 x,y 都有

$$m \mid x-y \mid \leqslant \mid f(x)-f(y) \mid \leqslant M \mid x-y \mid$$

由上可知存在 r 使得

$$f(r+1)-f(r)=M$$

因此有

$$\begin{aligned} &M \mid f(r+1)-f(r) \mid \geqslant d = \\ &b_{r+1}-b_r = f(f(r+1)) - f(f(r)) \geqslant \\ &m \mid f(r+1)-f(r) \mid \end{aligned}$$

也即

$$\begin{aligned} M^2 = M \mid f(r+1)-f(r) \mid \geqslant d \geqslant \\ m \mid f(r+1)-f(r) \mid = mM \end{aligned}$$

同样存在一个 s 使得

$$f(s+1)-f(s)=m$$

因此有

$$\begin{aligned} mM = M \mid f(s+1)-f(s) \mid \geqslant d = c_{s+1}-c_s \geqslant \\ m \mid f(s+1)-f(s) \mid = m^2 \end{aligned}$$

因此

$$d \geqslant mM \geqslant d$$

故只能有

$$d = mM$$

而且上面的等号要成立只能有

$$f(f(r)), f(f(r)+1), \cdots, f(f(r+1))$$

之间的差均为 m,且

$$f(f(s)), f(f(s)+1), \cdots, f(f(s+1))$$

之间的差均为 M,所以

$$m = c_r - b_r = g$$

并且

$$M = c_s - b_s = g$$

故

$$m = M$$

所以

$$a_n = f(n)$$

也是等差数列.

4 在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,AD,BE 分别是 $\angle CAB$ 和 $\angle ABC$ 的平分线. K 是 $\triangle ADC$ 的内心,假设 $\angle BEK=45°$,求 $\angle CAB$ 所能取到的所有值.

韩国命题

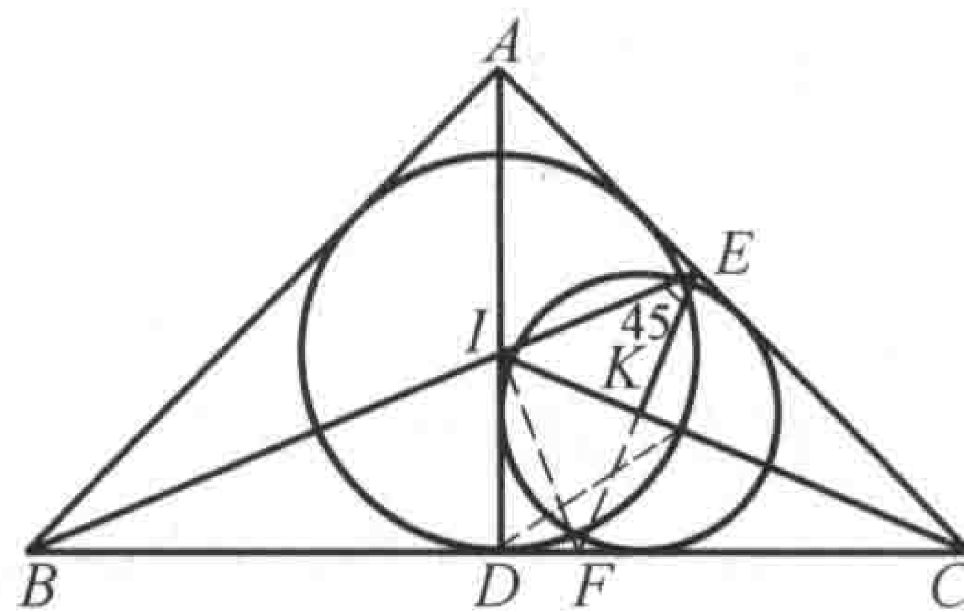


图 50.2

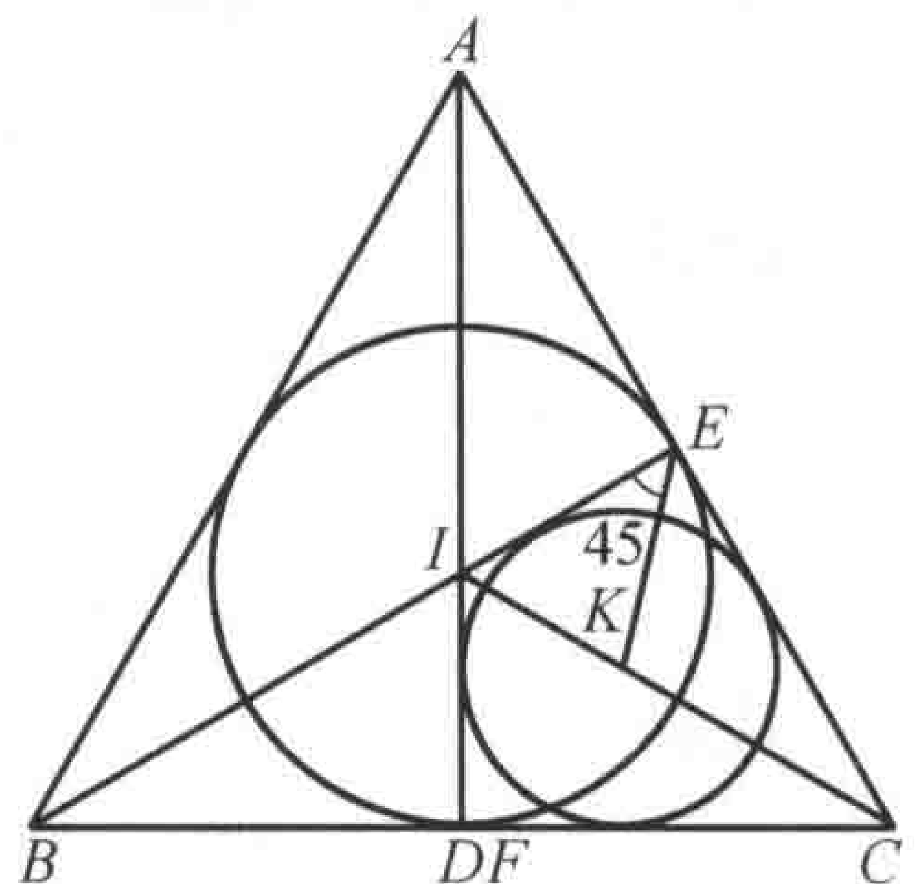


图 50.3

解 显然 CK 是 $\angle ACB$ 的平分线,因此 E 关于 CI 的对称点 F 在 BC 上,联结 IF,DK,FK,由对称性可知 $\angle IFK=45°$,由于 DK 是 $\angle ADC$ 的平分线,因此也有 $\angle IDK=45°$. 因此有以下两种情况:

(1) 若 $D\neq F$(图 50.2),则 I,D,F,K 四点共圆,故

$$\angle IKF=180°-\angle IDF=90°$$

由对称性 $\angle IKE=90°$,故 $\angle EIK=45°$,在 $\triangle BIC$ 中有

$$45°=\angle EIK=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ACB=\angle ABC$$

因此 $\angle BAD=45°$,故 $\angle CAB=90°$;

(2) 若 D,F 重合(图 50.3),则

$$\angle IEC=\angle IDC=90°$$

也即 $\angle ABC$ 的平分线也是 AC 的高,故

$$AB=BC$$

因此 $\triangle ABC$ 为正三角形,故 $\angle CAB=60°$.

综上所述,$\angle CAB=90°$ 或 $60°$.

5 求所有函数 $f:\mathbf{Z}_+\to\mathbf{Z}_+$,使得对于任意正整数 a,b,a,$f(b)$,$f(b+f(a)-1)$ 都可以形成一个三角形.

法国命题

解 如果整数边三角形有一边长为 1,则另外两边一定要相等. 因此取 $a=1$ 可知,对于任意正整数 b 都有

$$f(b)=f(b+f(1)-1) \quad ①$$

(1) 若 $f(1)\neq 1$,则

$$f(1)>1$$

令

$$f(1)-1=a$$

代入式 ① 可得

$$f(b)=f(b+a)$$

也即 f 是一个以 a 为周期的函数,因此 f 的值域有界,令

$$Max\{f(x)\}=M$$

则取 $a=3M$,则 a,$f(b)$ 以及 $f(b+f(a)-1)$ 不能形成三角形,矛盾. 因此只能有

$$f(1)=1$$

(2) 令 $b=1$，则 $a, f(1)=1, f(f(a))$ 可以形成一个三角形，故 $f(f(a))=a$ 对于任意正整数 a 都成立，因此 f 是一个 $\mathbf{Z}_+ \to \mathbf{Z}_+$ 的一一映射.

(3) 由已知 $2, f(b), f(b+f(2)-1)$ 可以形成一个三角形，由上面讨论可知

$$f(2)>1$$

令

$$t=f(2)-1>0$$

则由于 f 是一一映射，故

$$0<|f(b+t)-f(b)|<2$$

因此对于任意 b 都有

$$f(b+t)-f(b)=\pm 1$$

由数学归纳法可知

$$f(b+nt)=f(b)\pm n$$

对于任意正整数 n 都成立，由于

$$f(b+nt)>0$$

故只能有

$$f(b+nt)=f(b)+n$$

故

$$f(b+t)-f(b)=1$$

对于任意 b 都成立.

因此 $f(1)=1, f(1+t), f(1+2t), \cdots, f(1+nt), \cdots$ 取遍全体正整数，由于 f 是一一映射，故 $1, 1+t, 1+2t, \cdots$ 也应该取遍全体正整数，所以 $t=1$，因此对于任意正整数 b 都有

$$f(b+1)=f(b)+1$$

由于 $f(1)=1$，所以 $f(n)=n$ 对于任意正整数 n 都成立.

综上所述，$f(n)=n$ 为唯一的解.

6 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是不同的正整数，M 是一个由 $n-1$ 个正整数构成的集合，但是 M 中不包含

$$s=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

一只蚱蜢在实数轴的整数点上跳动，开始时它在零点，然后向右跳 n 次，n 次的步长恰好是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个排列. 证明：可以适当调整 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的顺序，使得蚱蜢不会跳到 M 中的数所在的任何整点上.

俄罗斯命题

证明　$n=1$ 时，$M=\varnothing$，结论显然成立；$n=2$ 时，M 只有一个

数 m,a_1,a_2 中必有一个不等于 m,把它放在第一步即可。以下假设 $k\geqslant 3$,并且对于任意 $n<k$,结论都成立.

不失一般性,假设

$$a_1<a_2<\cdots<a_k$$

令

$$s_i=\sum_{j=1}^{i}a_j$$

则

$$s_k=s$$

假设蚱蜢先按照 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的顺序来跳.

(1) 如果 $s_{k-1}<m_{k-1}$.

(i) 如果 $s_{k-1}\notin M$,则由归纳假设可以对前 $k-1$ 步重新调整,使得蚱蜢没遇到 M 中的数;

(ii) 如果 $s_{k-1}\in M$,对于任意 $1\leqslant i\leqslant k-1$,都有

$$s_{k-1}-a_i<s_{k-1}<s_k-a_i$$

由于除了 s_{k-1} 之外,只有 $k-2$ 个 M 中的数,因此存在一个 i_0,使得 $s_{k-1}-a_{i_0},s_k-a_{i_0}$ 都不属于 M. 我们将 a_{i_0} 换到最后一步,a_n 为倒数第二步,这样从目的地倒退两步都没遇到 M 中的数,由于

$$s_k-a_k-a_{i_0}<s_{k-1}\leqslant m_{k-2}$$

由归纳假设可以调整前 $k-2$ 步,使得蚱蜢没遇到 M 中的数.

(二) 如果 $s_{k-1}\geqslant m_{k-1}$,则

$$s_{k-2}>m_{k-2}$$

则由归纳假设可以重新调整前 $k-1$ 步避开前面 $k-2$ 个 M 中的数 $m_1,m_2,\cdots,m_{k-2}$,如果此时前面 $k-1$ 步也避开了 m_{k-1},则最后一步走 a_k 即可安全到家. 以下假设 m_{k-1} 没有被避开,也即存在一个 $p\leqslant k-1$,使得第 p 步正好踩到了 m_{k-1},由于第 p 步的长度小于 a_k,所以我们将 a_k 与第 p 步进行对换,则此时第 p 步跨过了 m_{k-1},因此从这一步开始避开了所有的 M,而由构造可知,前 $p-1$ 步避开了 $m_1,m_2,\cdots,m_{k-2}$ 以及 m_{k-1},因此也避开了所有的 M.

综上所述,结论成立.

第 50 届国际数学奥林匹克英文原题

The fifty IMO was held from July 10th to July 22th 2009 in the city of Germany.

1 Let n be a positive integer and let $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k (k \geqslant 2)$ be distinct integers in the set $\{1, 2, \cdots, n\}$ such that n divides $a_i(a_{i+1}-1)$ for $i=1, 2, \cdots, k-1$. Prove that n does not divide $a_k(a_1-1)$. (Australia)

2 Let ABC be a triangle with circumcentre O. The points P and Q are interior points of the sides CA and AB respectively. Let K, L and M be the midpoints of the segments BP, CQ and PQ. respectively, and let Γ be the circle passing through K, L and M. Suppose that the line PQ is tangent to the circle Γ. Prove that $OP=OQ$. (Russia)

3 Suppose that $S_1, S_2, S_3, \cdots$ is a strictly increasing sequence of positive integers such that the sub-sequences S_{S_1}, S_{S_2}, S_{S_3}, $\cdots$ and S_{S_1+1}, S_{S_2+1}, S_{S_3+1}, $\cdots$ are both arithmetic progressions. Prove that the sequence $S_1, S_2, S_3, \cdots$ is an arithmetic progression. (USA)

This problem is equivalent to: $f: \mathbf{Z}_+ \rightarrow \mathbf{Z}_+$ is a strictly increasing function. $b_n = f(f(n))$ is an arithmetic progression, $c_n = f(f(n)+1)$ is also an arithmetic progression. Prove that $a_n = f(n)$ is also an arithmetic progression.

4 Let ABC be a triangle with $AB=AC$. The angle bisectors of $\angle CAB$ and $\angle ABC$ meet the sides BC and CA at D and E, respectively. Let K be the incentre of triangle ADC. Suppose that $\angle BEK = 45°$. Find all possible values of $\angle CAB$. (Korea)

5 Determine all functions $f:\mathbf{Z}_+\to\mathbf{Z}_+$, such that for all positive integers a and b, there exists a triangle with sides of lengths

$$a, f(b) \text{ and } f(b+f(a)-1)$$

(France)

6 Let $a_1, a_2, \cdots, a_n$ be distinct positive integers and let M be a set of $n-1$ positive integers not containing $s=a_1+a_2+\cdots+a_n$. A grasshopper jumps along the real axis, starting at the point 0 and making n jumps to the right with lengths $a_1, a_2, \cdots, a_n$ in some order. Prove that the order can be chosen in such a way that the grasshopper never lans on any point in M.

(Russia)

第 50 届国际数学奥林匹克各国成绩表

2009，德国

名次	国家或地区	分数	奖牌			参赛队
		（满分 252）	金牌	银牌	铜牌	人数
1.	中国	221	6	—	—	6
2.	日本	212	5	—	1	6
3.	俄罗斯	203	5	1	—	6
4.	韩国	188	3	3	—	6
5.	朝鲜	183	3	2	1	6
6.	美国	183	2	4	—	6
7.	泰国	181	1	5	—	6
8.	土耳其	177	2	4	—	6
9.	德国	171	1	4	1	6
10.	白俄罗斯	167	1	4	1	6
11.	台湾	165	1	5	—	6
12.	意大利	165	2	2	2	6
13.	罗马尼亚	163	2	2	2	6
14.	乌克兰	162	3	1	2	6
15.	越南	161	2	2	2	6
16.	伊朗	161	1	4	1	6
17.	巴西	160	1	3	2	6
18.	加拿大	158	1	3	2	6
19.	英国	157	1	3	2	6
20.	保加利亚	157	1	3	2	6
21.	匈牙利	157	1	2	3	6

第 50 届国际数学奥林匹克预选题

德国,2009

代数部分

1 求最大的整数 k,使得下列命题为真.

已知任意 2 009 个非退化的三角形. 将每个三角形的三边染上颜色,且一条边染上蓝色,一条边染上红色,一条边染上白色. 对于每种颜色,将边的长度进行分类排序,且设蓝色边的长度满足

$$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_{2\,009}$$

红色边的长度满足

$$r_1 \leqslant r_2 \leqslant \cdots \leqslant r_{2\,009}$$

白色边的长度满足

$$w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_{2\,009}$$

则存在 k 个下标 j,使得 b_j, r_j, w_j 为边长能构成一个非退化的三角形.

证明 满足条件的最大整数 k 的值为 1.

首先证明:以 $b_{2\,009}, r_{2\,009}, w_{2\,009}$ 为边长能构成一个非退化的三角形.

不失一般性,假设

$$w_{2\,009} \geqslant r_{2\,009} \geqslant b_{2\,009}$$

因为存在一个三边的颜色分别是白、蓝、红,且边长分别为 w, b, r 的三角形,其中

$$w = v_{2\,009}$$

所以

$$b + r > w, b_{2\,009} \geqslant b, r_{2\,009} \geqslant r$$

于是

$$b_{2\,009} + r_{2\,009} \geqslant b + r > w = w_{2\,009}$$

下面给出一个三角形序列,使得以 $w_j, b_j, r_j (j < 2\,009)$ 为边长不能构成一个非退化的三角形.

设三角形序列为 $\Delta_j (j = 1, 2, \cdots, 2\,009)$,其中,$\Delta_j$ 满足下列条件:

(1) 蓝色边的长度为 $2j$.

(2) 对于 $j \leqslant 2\ 008$,红色边的长度为 j;当 $j=2\ 009$ 时,红色边的长度为 $4\ 018$.

(3) 对于 $j \leqslant 2\ 007$,白色边的长度为 $j+1$;当 $j=2\ 008$ 时,白色边的长度为 $4\ 018$;当 $j=2\ 009$ 时,白色边的长度为 1.

因为当 $j \leqslant 2\ 007$ 时

$$(j+1)+j > 2j \geqslant j+1 > j$$

当 $j=2\ 008$ 时

$$2j+j > 4018 > 2j > j$$

当 $j=2\ 009$ 时

$$4\ 018+1 > 2j = 4\ 018 > 1$$

所以,这样的三角形序列是存在的.

但是,当 $1 \leqslant j \leqslant 2\ 008$ 时

$$w_j = j, r_j = j, b_j = 2j$$

则

$$w_j + r_j = j + j = 2j = b_j$$

因此,当 $1 \leqslant j \leqslant 2\ 008$ 时,以 b_j, r_j, w_j 为边长不能构成一个非退化的三角形.

2 设正实数 a,b,c 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$. 证明

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(2b+c+a)^2}+\frac{1}{(2c+a+b)^2} \leqslant \frac{3}{16}$$

证明 注意到对于任意正实数 x,y,z,由均值不等式可得

$$2x+y+z=(x+y)+(x+z) \geqslant 2\sqrt{(x+y)(x+z)}$$

则

$$\frac{1}{(2x+y+z)^2} \leqslant \frac{1}{4(x+y)(x+z)}$$

将其应用到原不等式的左边可得

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(2b+c+a)^2}+\frac{1}{(2c+a+b)^2} \leqslant$$

$$\frac{1}{4(a+b)(a+c)}+\frac{1}{4(b+c)(b+a)}+\frac{1}{4(c+a)(c+b)}=$$

$$\frac{a+b+c}{2(a+b)(b+c)(c+a)} \qquad ①$$

由均值不等式可得

$$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b \geqslant 6abc$$

故

$$9(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8(a+b+c)(ab+bc+ca) \qquad ②$$

由于

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$$

可以写为

$$ab+bc+ca=abc(a+b+c) \quad ③$$

且由

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2$$

得

$$(ab+bc+ca)^2 \geqslant 3abc(a+b+c) \quad ④$$

因此，结合式 ①，②，③，④ 得

$$\frac{a+b+c}{2(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{2(a+b)(b+c)(c+a)} \cdot \frac{ab+bc+ca}{abc(a+b+c)} \cdot \frac{abc(a+b+c)}{(ab+bc+ca)^2} \leqslant \frac{9}{2\times 8}\times 1\times\frac{1}{3}=\frac{3}{16}$$

3 求所有从正整数集到正整数集上的满足如下条件的函数 f：对所有正整数 a 和 b，都存在一个以 a，$f(b)$ 和 $f(b+f(a)-1)$ 为三边长的非退化三角形（称一个三角形为非退化三角形是指它的三个顶点不共线）.

解 三边长都为整数的三角形，如果有一条边长为 1，则另外两条边长一定相等. 因此，取 $a=1$，可得

$$f(b)=f(b+f(1)-1) \quad ①$$

首先，我们证明 $f(1)=1$.

事实上，若

$$f(1)=1+m>1$$

代入式 ①，得

$$f(b)=f(b+m)$$

故 f 是一个以 m 为周期的周期函数. 于是 f 的值域为有限个正整数，记值域中的最大数为 M. 令 $a>2M$，则

$$a>M+M\geqslant f(b)+f(b+f(1)-1)$$

矛盾.

其次，我们证明

$$f(f(n))=n, n\in\mathbf{N}_+$$

令 $a=n$，$b=1$，则由 $f(1)=1$ 可得

$$f(f(n))=n, n\in\mathbf{N}_+$$

所以，f 是一个 $\mathbf{N}_+\to\mathbf{N}_+$ 的双射.

由题设，令 $a=2$，可得 2，$f(b)$，$f(b+f(2)-1)$ 可以构成一个三角形的三边长. 由上面的讨论知，$f(2)\geqslant 2$，记

$$f(2)-1=t$$

由于 f 是一个 $\mathbf{N}_+ \to \mathbf{N}_+$ 的双射，所以

$$0<|f(b)-f(b+t)|<2$$

因此，对任意正整数 b，都有

$$f(b)-f(b+t)=\pm 1$$

由数学归纳法易知

$$f(b+nt)=f(b)\pm n, n=1,2,\cdots,$$

由于

$$f(b+nt)>0$$

所以只能是

$$f(b+nt)=f(b)+n, n=1,2,\cdots,$$

从而

$$f(b+t)=f(b)+1$$

对任意正整数 b 都成立.

因此，$f(1)=1, f(1+t), f(1+2t), \cdots, f(1+nt), \cdots$ 取遍全体正整数，由于 f 是一个 $\mathbf{N}_+ \to \mathbf{N}_+$ 的双射，所以，$1, 1+t, 1+2t, \cdots$ 也取遍所有的正整数，故 $t=1$.

因此

$$f(b+1)=f(b)+1, b=1,2,\cdots$$

便知

$$f(n)=n, n\in \mathbf{N}_+$$

又若

$$f(n)=n, n\in \mathbf{N}_+$$

则

$$f(b)=b, f(b+f(a)-1)=b+a-1$$

易知 $a, b, a+b-1$ 可以为一个三角形的三边长.

综上所述，$f(n)=n, n\in \mathbf{N}_+$ 为本题的唯一解.

4 已知正实数 a, b, c 满足 $ab+bc+ca\leqslant 3abc$. 证明

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}}+3\leqslant \sqrt{2}(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a})$$

解 由幂平均不等式得

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{a+b}=2\sqrt{\frac{ab}{a+b}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(2+\frac{a^2+b^2}{ab}\right)}\geqslant$$

$$2\sqrt{\frac{ab}{a+b}}\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}}\right)=$$

$$\sqrt{\frac{2ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}$$

同理

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{b+c}\geqslant\sqrt{\frac{2bc}{b+c}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}}$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{c+a}\geqslant\sqrt{\frac{2ca}{c+a}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}}$$

再由算术平均与调和平均不等式得

$$\sqrt{\frac{2ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{2bc}{b+c}}+\sqrt{\frac{2ca}{c+a}}\geqslant$$

$$3\sqrt{\frac{3}{\left(\sqrt{\frac{a+b}{2ab}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b+c}{2bc}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c+a}{2ca}}\right)^2}}=$$

$$3\sqrt{\frac{3abc}{ab+bc+ca}}\geqslant 3$$

于是,原不等式成立.

5 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. 证明:存在实数 x,y,使得

$$f(x-f(y))>yf(x)+x$$

解 假设对所有的实数 x,y,均有

$$f(x-f(y))\leqslant yf(x)+x \quad ①$$

设 $a=f(0)$,在式 ① 中令 $y=0$,可得

$$f(x-a)\leqslant x$$

对所有的实数 x 成立.

于是,对于所有的实数 y,有

$$f(y)\leqslant y+a \quad ②$$

在式 ① 中令 $x=f(y)$,并结合式 ② 可得

$$a=f(0)\leqslant yf(f(y))+f(y)\leqslant yf(f(y))+y+a$$

即

$$0\leqslant y(f(f(y))+1)$$

于是,对于所有的 $y>0$,有

$$f(f(y))\geqslant -1 \quad ③$$

由式 ②,③ 可得,对于所有的 $y>0$,有

$$-1\leqslant f(f(y))\leqslant f(y)+a$$

于是,对于所有的 $y>0$,有

$$f(y)\geqslant -a-1 \quad ④$$

下面证明:对于所有的实数 x,有

$$f(x)\leqslant 0 \quad ⑤$$

假设结论不成立，即存在某个实数 x，使得

$$f(x)>0$$

选择 y，使得

$$y<x-a, y<\frac{-a-x-1}{f(x)}$$

由式 ② 可得

$$x-f(y)\geqslant x-(y+a)>0$$

由式 ①，④ 得

$$yf(x)+x\geqslant f(x-f(y))\geqslant -a-1$$

于是

$$y\geqslant\frac{-a-x-1}{f(x)}$$

矛盾.

因此，式 ⑤ 成立.

在式 ⑤ 中，令 $x=0$，可得

$$a=f(0)\leqslant 0$$

结合式 ② 可得，对于所有的实数 x，有

$$f(x)\leqslant x+a\leqslant x \quad ⑥$$

选择 y，使得 $y>0$ 且

$$y>-f(-1)-1$$

设

$$x=f(y)-1$$

由式 ①，⑤，⑥ 可得

$$\begin{aligned}f(-1)=f(x-f(y))\leqslant\\ yf(x)+x=\\ yf(f(y)-1)+f(y)-1\leqslant\\ y(f(y)-1)-1\leqslant -y-1\end{aligned}$$

即

$$y\leqslant -f(-1)-1$$

矛盾.

6 设 $s_1,s_2,s_3,\cdots$ 是一个严格递增的正整数数列，使得它的两个子数列 $s_{s_1},s_{s_1},s_{s_3},\cdots$ 和 $s_{s_1+1},s_{s_2+1},s_{s_3+1},\cdots$ 都是等差数列. 证明：数列 $s_1,s_2,s_3,\cdots$ 本身也是一个等差数列.

证明 两个等差数列 $s_{s_1},s_{s_2},s_{s_3},\cdots$ 和 $s_{s_1+1},s_{s_2+1},s_{s_3+1},\cdots$ 的公差相等.

由于 $s_1,s_2,s_3,\cdots$ 是一个严格递增的正整数数列，所以，对任意正整数 i,j，有

$$|s_i - s_j| \geqslant |i - j|$$

设等差数列 $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \cdots$ 和 $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \cdots$ 的公差分别为 D, E，则由

$$s_{s_n} < s_{s_n+1} \leqslant s_{s_{n+1}}$$

可得

$$s_{s_1} + (n-1)D < s_{s_1+1} + (n-1)E \leqslant s_{s_1} + nD$$

故

$$0 < s_{s_1+1} - s_{s_1} + (n-1)(E-D) \leqslant D$$

所以，$D = E$(否则，当 $n \to \infty$ 时

$$s_{s_1+1} - s_{s_1} + (n-1)(E-D)$$

是无界的).

于是

$$s_{s_n+1} - s_{s_n} = s_{s_1+1} - s_{s_1}$$

是一个常数.

因为

$$D = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} \geqslant s_{n+1} - s_n$$

所以，记

$$m = \min\{s_{n+1} - s_n : n = 1, 2, \cdots\}$$
$$M = \max\{s_{n+1} - s_n : n = 1, 2, \cdots\}$$

则对任意正整数 i, j，都有

$$m|i-j| \leqslant |s_i - s_j| \leqslant M|i-j|$$

不妨设正整数 r, t 使得

$$s_{r+1} - s_r = M, s_{t+1} - s_t = m$$

则有

$$M|s_{r+1} - s_r| \geqslant s_{s_r+1} - s_{s_r} = D =$$
$$s_{s_{r+1}+1} - s_{s_r+1} \geqslant m|s_{r+1} - s_r|$$

此即

$$M^2 = M(s_{r+1} - s_r) \geqslant D \geqslant m(s_{r+1} - s_r) = mM$$

同样地，有

$$mM = M(s_{t+1} - s_t) \geqslant D \geqslant m(s_{t+1} - s_t) = m^2$$

从上面两式可得

$$D = mM$$

且上面等号成立只能是

$$s_{s_r}, s_{s_r+1}, \cdots, s_{s_{r+1}}$$

是一个公差为 m 的等差数列

$$s_{s_t}, s_{s_t+1}, \cdots, s_{s_{t+1}}$$

是一个公差为 M 的等差数列，故

$$m = M$$

从而，数列 $s_1, s_2, s_3, \cdots$ 本身也是一个等差数列.

7 求所有的函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,使得对所有的实数 x,y,有

$$f(xf(x+y))=f(yf(x))+x^2$$

解 不难看出 $f(x)=x$ 和 $f(x)=-x$ 是原函数方程的解.

下面证明:原函数方程没有其他的解.

设 f 是满足原函数方程的函数,则 f 不是一个常数.首先证明:$f(0)=0$.

假设 $f(0)\neq 0$.对于任意的实数,设

$$(x,y)=\left(0,\frac{t}{f(0)}\right)$$

由原函数方程得

$$f(0)=f(t) \qquad ①$$

与 f 不是一个常值函数矛盾.因此

$$f(0)=0$$

对于任意的实数 t,分别设

$$(x,y)=(t,0)$$

和

$$(x,y)=(t,-t)$$

则由原函数方程得

$$f(tf(t))=f(0)+t^2=t^2,f(tf(0))=t(-tf(t))+t^2$$

于是,对于任意的实数 t,有

$$f(tf(t))=t^2,f(-tf(t))=-t^2$$

因此,对于每个实数 v,都存在一个实数 u,使得

$$f(u)=v$$

若 $f(t)=0$,则

$$0=f(tf(t))=t^2$$

即 $t=0$.

从而可得 0 是满足 $f(t)=0$ 的唯一的实数 t.

其次证明:对于任意的实数 s,有

$$f(-s)=-f(s) \qquad ②$$

当 $f(s)=0$ 时,结论显然成立.

当 $f(s)<0$ 时,则存在一个实数 $t\neq 0$,使得

$$f(s)=-t^2$$

则

$$f(t)\neq 0$$

于是,存在一个实数 a,使得

$$af(t)=s$$

在原方程中,设

$$(x,y)=(t,a)$$

则

$$f(tf(t+a))=f(af(t))+t^2=f(s)+t^2=0$$

于是

$$tf(t+a)=0$$

从而

$$t+a=0$$

即

$$s=-tf(t)$$

故

$$f(-s)=f(tf(t))=t^2=-(-t^2)=-f(s)$$

当 $f(s)>0$ 时,则存在一个实数 $t\neq 0$,使得

$$f(s)=t^2$$

选择一个数 a,使得

$$tf(a)=s$$

在原方程中,设

$$(x,y)=(t,a-t)$$

则

$$f(s)=f(tf(a))=f((a-t)f(t))+t^2=$$
$$f((a-t)f(t))+f(s)$$

于是

$$f((a-t)f(t))=0$$

从而

$$(a-t)f(t)=0$$

因为 $f(t)\neq 0$,所以,$a=t$. 于是

$$s=tf(t)$$

且有

$$f(-s)=f(-tf(t))=-t^2=-f(s)$$

综上,可得式 ② 成立.

在原函数方程中分别设

$$(x,y)=(s,t),(x,y)=(t,-s-t),(x,y)=(-s-t,s)$$

则

$$f(sf(s+t))=f(tf(s))+s^2$$
$$f(tf(-s))=f((-s-t)f(t))+t^2$$
$$f((-s-t)f(-t))=f(sf(-s-t))+(s+t)^2$$

在第二、三个等式中利用式 ② 可得

$$f(tf(s))-f(sf(s+t))=-s^2$$
$$f(tf(s))-f((s+t)f(t))=-t^2$$

$$f((s+t)f(t))+f(sf(s+t))=(s+t)^2$$

三式相加可得

$$2f(tf(s))=2ts$$

即对于每一对实数 s,t,有

$$f(tf(s))=ts$$

固定 s,且使 $f(s)=1$,则

$$f(t)=st$$

在原函数方程中,设

$$(x,y)=(s,0)$$

则

$$s=\pm 1$$

因此,对于任意的实数 x,有

$$f(x)=x$$

及

$$f(x)=-x$$

经验证,这两个函数均满足原函数方程.

组合部分

1 有 2009 张卡片,每张卡片一面为金色,另一面为黑色,且在一张长桌子上排成一排. 开始时,所有卡片的金色面朝上. 两个玩家站在桌子的同侧,且交替地进行操作. 每次操作规则如下:选择相邻的 50 张卡片,且最左边的一张卡片的金色面朝上,其翻转卡片,使得金色面朝上的变为黑色面朝上,黑色面朝上的变为金色面朝上,并规定最后一个按上述规则操作的玩家获胜. 问:

(1) 操作是否一定会结束?

(2) 先操作的玩家是否有取胜策略?

解 (1) 记黑色面朝上的卡片为 0,金色面朝上的卡片为 1.

对 2 009 张卡片的每一种摆放,从左到右读,与 2 009 个数码在二进制表示下的非负整数(首位数码可以是 0)构成一一对应. 而每次操作该数变小,因此,操作一定会结束.

(2) 只需证明:先操作的玩家没有取胜策略.

事实上,将卡片从右到左进行编号. 考虑编号为 $50i(i=1,2,\cdots,40)$ 的集合 S.

设 S 中 n 次操作后金色面朝上的卡片的数目为 g_n.

显然

$$g_0=40$$

且

$$|g_n - g_{n+1}| = 1$$

于是,奇数次操作后,S 中金色面朝上的卡片的数目为奇数,后操作的玩家可以从 S 中选一张金色面朝上的卡片.对这张卡片及其右边的 49 张卡片进行操作,因此,这个玩家总能获胜.

2 对于任意的整数 $n(n \geqslant 2)$,设 $N(n)$ 是三元数组 $(a_i, b_i, c_i)(i = 1, 2, \cdots, N(n))$ 数目的最大值,其中 a_i, b_i, c_i 是非负整数,且满足下列两个条件:

(1) 对于所有的 i, $a_i + b_i + c_i = n$;

(2) 若 $i \neq j$,则 $a_i \neq a_j, b_i \neq b_j, c_i \neq c_j$.

求 $N(n)$.

解 设整数 $n \geqslant 2$, $\{T_1, T_2, \cdots, T_N\}$ 是任意满足条件(1),(2) 的三元非负整数组构成的集合.

因为第一个分量 a_i 两两不同,所以

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \geqslant \sum_{i=1}^{N} (i-1) = \frac{N(N-1)}{2}$$

类似地

$$\sum_{i=1}^{N} b_i \geqslant \frac{N(N-1)}{2}, \sum_{i=1}^{N} c_i \geqslant \frac{N(N-1)}{2}$$

将三个不等式相加,并结合条件(1) 得

$$\frac{3N(N-1)}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{N} a_i + \sum_{i=1}^{N} b_i + \sum_{i=1}^{N} c_i = \sum_{i=1}^{N} (a_i + b_i + c_i) = nN$$

于是

$$N \leqslant \frac{2n}{3} + 1$$

从而

$$N \leqslant \left[\frac{2n}{3}\right] + 1$$

下面举例说明

$$N(n) = \left[\frac{2n}{3}\right] + 1$$

是可以取到的.

当 $n = 3k - 1$ 时

$$\left[\frac{2n}{3}\right] + 1 = 2k$$

取

$$(a_i, b_i, c_i) = (i-1, k+i, 2k-2i)$$

其中

$$i = 1, 2, \cdots, k$$

取

$$(a_i,b_i,c_i)=(i-1,i-k-1,4k+1-2i)$$

其中

$$i=k+1,k+2,\cdots,2k$$

当 $n=3k$ 时

$$\left[\frac{2n}{3}\right]+1=2k+1$$

取

$$(a_i,b_i,c_i)=(i-1,k+i-1,2k+2-2i)$$

其中

$$i=1,2,\cdots,k+1$$

取

$$(a_i,b_i,c_i)=(i-1,i-k-2,4k+3-2i)$$

其中

$$i=k+2,k+3,\cdots,2k+1$$

当 $n=3k+1$ 时

$$\left[\frac{2n}{3}\right]+1=2k+1$$

取

$$(a_i,b_i,c_i)=(i-1,k+i-1,2k+3-2i)$$

其中

$$i=1,2,\cdots,k+1$$

取

$$(a_i,b_i,c_i)=(i-1,i-k-2,4k+4-2i)$$

其中

$$i=k+2,k+3,\cdots,2k+1$$

显然，所选取的 a_i,b_i,c_i 均满足条件(1),(2).

因此，$N(n)$ 的值为 $\left[\frac{2n}{3}\right]+1$.

3 设 n 是一个正整数. 已知数列 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}$ 满足对于每一个 $i(i=1,2,\cdots,n-1)$，$c_i=0$ 或 1. 数列 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 和 $b_0,b_1,\cdots,b_n$ 满足 $a_0=b_0=1$，$a_1=b_1=7$，且对于所有的 $i(i=1,2,\cdots,n-1)$，有

$$a_{i+1}=\begin{cases}2a_{i-1}+3a_i, c_i=0\\3a_{i-1}+a_i, c_i=1\end{cases}$$

$$b_{i+1}=\begin{cases}2b_{i-1}+3b_i, c_{n-i}=0\\3b_{i-1}+b_i, c_{n-i}=1\end{cases}$$

证明：$a_n=b_n$.

解　对于一个长度为 n 的二进制的数

$$w=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$$

其中，$\sigma_i\in\{0,1\}$，$i=1,2,\cdots,n$ 及 $\sigma\in\{0,1\}$，设

$$w\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n\sigma,\sigma w=\sigma\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$$

且

$$\overline{w}=\sigma_n\sigma_{n-1}\cdots\sigma_1$$

$\varnothing$ 是长度为 0 的空的数.

则

$$\overline{\varnothing}=\varnothing$$

设 (u,v) 是一个实数对，对于二进制的数 w，递归地定义数 $(u,v)^w$ 如下

$$(u,v)^{\varnothing}=v,(u,v)^0=2u+3v$$

$$(u,v)^1=3u+v$$

$$(u,v)^{w\sigma c}=\begin{cases}2(u,v)^w+3(u,v)^{w\sigma},c=0\\3(u,v)^w+(u,v)^{w\sigma},c=1\end{cases}$$

对 w 的长度用数学归纳法容易得到，对于所有的实数 $u_1,v_1,u_2,v_2,\lambda_1,\lambda_2$，有

$$(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2,\lambda_1v_1+\lambda_2v_2)^w=\lambda_1(u_1,v_1)^w+\lambda_2(u_2,v_2)^w \quad ①$$

且对于 $c\in\{0,1\}$，有

$$(u,v)^{cw}=(v,(u,v)^c)^w \quad ②$$

对于 $n\geqslant 1$，令

$$w=c_1c_2\cdots c_{n-1}$$

则

$$a_n=(1,7)^w,b_n=(1,7)^{\overline{w}}$$

于是，只要证明对于每一个二进制的数 w，有

$$(1,7)^w=(1,7)^{\overline{w}} \quad ③$$

对 w 的长度用数学归纳法.

当 w 的长度为 0 和 1 时，结论显然成立.

假设对所有长度不超过 $n-1$ 的二进制的数，结论都成立. 设 $w\sigma c$ 是长度为 $n(n\geqslant 2)$ 的二进制的数.

注意到，对于 $\sigma\in\{0,1\}$，有

$$(2,1)^\sigma=7=(1,7)^{\varnothing},(1,7)^0=23,(1,7)^1=10$$

设 $c=0$，由式 ①，② 得

$$\begin{aligned}(1,7)^{w\sigma 0}&=2(1,7)^w+3(1,7)^{w\sigma}=\\&2(1,7)^{\overline{w}}+3(1,7)^{\sigma\overline{w}}=\\&2(2,1)^{\sigma\overline{w}}+3(1,7)^{\sigma\overline{w}}=\\&(7,23)^{\sigma\overline{w}}=(1,7)^{0\sigma\overline{w}}\end{aligned}$$

设 $c=1$，类似地可得

$$
\begin{aligned}
(1,7)^{w\sigma 1} &= 3(1,7)^{w} + (1,7)^{w\sigma} = 3(1,7)^{\bar{w}} + (1,7)^{\sigma\bar{w}} = \\
&3(2,1)^{\sigma\bar{w}} + (1,7)^{\sigma\bar{w}} = (7,10)^{\sigma\bar{w}} = (1,7)^{1\sigma\bar{w}}
\end{aligned}
$$

于是,式 ③ 对长度为 n 的二进制的数 w 也成立.

因此,$a_n = b_n$.

4 对于正整数 m,考虑将 $2^m \times 2^m$ 的棋盘分割为若干个由棋盘的方格组成的矩形,且一条对角线上的 2^m 个方格中的每一个都是被分割出的一个边长为 1 的矩形. 求分割出的矩形的周长之和的最小值.

解 对于 $k \times k$ 的棋盘,建立平面直角坐标系,且设第 i 列第 j 行的方格 C_{ij} 的顶点坐标分别为

$$(i-1,j-1),(i-1,j),(i,j-1),(i,j)$$

其中 $i,j \in \{1,2,\cdots,k\}$.

不失一般性,假设方格 $C_{ii}(i=1,2,\cdots,k)$ 是分割出的矩形.

因为没有被分割的矩形既包含这条对角线下方的方格,又包含这条对角线上方的方格,所以,分别考虑

$$B_k = \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant k} C_{ij} \text{ 和 } B'_k = \bigcup_{1 \leqslant j < i \leqslant k} C_{ij}$$

下面证明:对于 $k=2^m$,B_k 分割出的矩形的周长之和的最小值为 $2^{m+1}m$. 于是,对于 $2^m \times 2^m$ 的棋盘分割出的矩形周长之和的最小值为

$$2 \times 2^{m+1}m + 4 \times 2^m = 2^{m+2}(m+1)$$

首先,归纳地构造 B_{2^m} 分割出的矩形的周长之和为 $2^{m+1}m$ $(m \geqslant 1)$.

当 $m=0$ 时,B_{2^m} 是空集,周长之和为 0,结论显然成立.

假设 m 时结论成立,考虑 $B_{2^{m+1}}$. 可以将其看成是一个边长为 2^m 的正方形和两个 B_{2^m}. 于是,$B_{2^{m+1}}$ 分割出的矩形的周长之和为

$$4 \times 2^m + 2 \times 2^{m+1}m = 2^{m+2}(m+1)$$

设

$$D_k = 2k\log_2 k$$

当 $k=2^m$ 时

$$D_k = 2^{m+1}m$$

下面对 k 用数学归纳法证明:B_k 分割出的矩形的周长之和至少为 D_k.

当 $k=1$ 时,是平凡的(即前面 $m=0$ 时的情况),结论成立.

假设对于小于 k 的正整数结论均成立.

下面考虑关于 B_k 的一个确定的分割,使得分割出的矩形的周长之和最小.

设 R 是能覆盖 C_{1k} 的矩形,又设 R 的右下角的坐标为(i,j).

首先证明:$i=j$.

否则,$i<j$,则由(i,j)至$(i+1,j)$或由(i,j)至$(i,j-1)$的线段一定是分割出的某个矩形的边界.

不失一般性,假设两个端点为(i,j),$(i+1,j)$的线段是分割出的某个矩形的边界.接下来分两种情况讨论.

(1) 若对于 $j<l<k$,两个端点为(i,l),$(i+1,l)$的线段均不是分割出的某个矩形的边界,则存在一个分割出的矩形 R' 与 R 有公共边,且这条公共边的两个端点为(i,j),(i,k).若将这两个矩形合并成一个矩形,则周长之和变小,矛盾.

(2) 若存在某个整数 $l(j<l<k)$,使得两个端点为(i,l),$(i+1,l)$的线段是分割出的某个矩形的边界,则用两个端点为$(i+1,j)$,$(i+1,k)$的线段来代替 R 右侧的边.对于左侧的边在以(i,j),(i,k)为端点的线段上的矩形,将其左侧的边向右移,使其在以$(i+1,j)$,$(i+1,k)$为端点的线段上,于是,得到关于 B_k 的分割,分割出的矩形的周长之和更小,矛盾.

综上,R 的右下角的坐标为(i,i).

从而,只要对余下的 B_i 和 B_{k-i} 进行分割即可.

由归纳假设可得 B_k 分割出的矩形的周长之和至少为

$$2(k-i)+2i+D_i+D_{k-i}\geqslant$$
$$2k+2i\log_2 i+2(k-i)\log_2(k-i) \quad ①$$

注意到函数

$$f(x)=2x\log_2 x$$

当 $x>0$ 时,是凸函数,由琴生不等式得,当 $i=\frac{k}{2}$ 时,式①右边取得最小值.

故 B_k 分割出的矩形的周长之和至少为

$$2k+2\cdot\frac{k}{2}\log_2\frac{k}{2}+2\cdot\frac{k}{2}\log_2\frac{k}{2}=2k\log_2 k=D_k$$

5 有五个容量为 2L 的同样的空水桶分别放在正五边形的五个顶点处.Cinderella 和她的坏继母进行着如下轮次的较量:每一轮开始,继母从河边打 1L 的水,任意分配到这五个水桶中,然后,Cinderella 选择相邻的两个水桶,并将这两个水桶中的水倒入河中,再将这两个水桶放回原处.接下来进行下一个轮次.继母的目的是使得这些水桶中有一个水桶的水溢出,Cinderella 的目的是阻止这种情况发生.问:继母能否使得一个水桶的水溢出?

解 不能,且 Cinderella 能使得较量一直进行下去.

设五个水桶分别为 B_0,B_1,B_2,B_3,B_4,其中,$B_k(k=0,1,2,3,4)$ 与 B_{k-1} 和 B_{k+1} 相邻,且所有下标是在模 5 的意义下的.

Cinderella 能使每轮开始时满足下列三个条件:

(1) 相邻的两个水桶(不妨设为 B_1,B_2)是空的;

(2) 挨着这两个相邻水桶的两个水桶 B_0,B_3 中装的水之和不超过 1L;

(3) 最后剩下的水桶 B_4 中装的水不超过 1L.

由于所有水桶都是空的,因此,这三个条件在第一轮开始时是成立的.

假设 Cinderella 在第 $r(r\geqslant 1)$ 轮开始时能维持住使水桶满足如上的三个条件,且设这一轮开始时 $B_k(k=0,1,2,3,4)$ 中的水有 x_kL,且继母将 1L 水分配到这五个水桶中后,B_k 中的水有 y_kL.

由于这一轮开始时满足如上的三个条件,故不妨假设

$$x_1=x_2=0,x_0+x_3\leqslant 1,x_4\leqslant 1$$

当继母加入 1L 水后,有

$$y_0+y_1+y_2+y_3\leqslant 2$$

于是

$$y_0+y_2\leqslant 1$$

与

$$y_1+y_3\leqslant 1$$

中至少有一个成立.

不妨假设

$$y_1+y_3\leqslant 1$$

Cinderella 将 B_0,B_4 中的水倒空,于是,在下一轮开始时,B_0,B_4 是空的(满足条件(1)),$y_1+y_3\leqslant 1$(满足条件(2)).

最后,由于 $x_2=0$,则一定有 $y_2\leqslant 1$(满足条件(3)).

因此,Cinderella 能维持着这三个条件到第 $r+1$ 轮开始的时候.从而,每一轮她都能维持着这三个条件.

特别地,她能使每个水桶中的水不超过 1L,这也就保证了不会让 2L 的水桶中的水溢出.

6 在一个 999×999 的方格板上有一只瘸腿鸟按照下列要求运动：从任意一个方格的中心运动到任意一个与其相邻的方格的中心(与其有公共边的方格)，每次运动必须转弯，即任意两次连续运动的方向一定垂直. 瘸腿鸟的一条不相交的路是指其按照上述要求经过的方格的中心两两不同. 如果瘸腿鸟到达这条路的最后一个方格的中心后，可以直接运动到这条路开始时的第一个方格的中心，则称这条不相交的路是"闭合的". 问：瘸腿鸟的最长的一条闭合的、不相交的路要经过多少个方格？

解 $998^2 - 4 = 4(499^2 - 1)$ 个方格.

首先证明：这个数是瘸腿鸟经过方格数目的上界.

将第 i 行第 j 列的方格的中心记为 (i,j). 按照下述方法将方格染上 A,B,C,D 四种颜色：

若

$$(i,j) \equiv (0,0) \pmod 2$$

则将以 (i,j) 为中心的方格染为 A 色；

若

$$(i,j) \equiv (0,1) \pmod 2$$

则将以 (i,j) 为中心的方格染为 B 色；

若

$$(i,j) \equiv (1,0) \pmod 2$$

则将以 (i,j) 为中心的方格染为 C 色；

若

$$(i,j) \equiv (1,1) \pmod 2$$

则将以 (i,j) 为中心的方格染为 D 色；

瘸腿鸟从颜色为 A 的方格只能运动到颜色为 B 或 C 的方格.

在第一种情况下，瘸腿鸟经过方格的颜色的次序为

$$A,B,D,C,A,B,D,C,A,\cdots$$

在第二种情况下，瘸腿鸟经过方格的颜色的次序为

$$A,C,D,B,A,C,D,B,A,\cdots$$

由对称性，下面只讨论第一种情况.

因为路是闭合的，且这条路每种颜色的方格的数目相同，所以，颜色为 A 的方格共有 499^2 个.

下面证明：瘸腿鸟不可能经过所有颜色为 A 的方格.

在这个结论下，满足条件的路最多包含 $4(499^2 - 1)$ 个方格.

假设有一条路经过所有颜色为 A 的方格. 将颜色为 A 的方格按照国际象棋盘的方式染为黑色和白色，即任意两个中心的距离

为 2,且颜色为 A 的方格被染为不同的颜色. 由于颜色为 A 的方格的数目为奇数,则瘸腿鸟不能总是黑、白交替地沿着这条路运动. 因此,存在两个同色的开始时颜色为 A 的方格,满足从其中的一个方格经过 4 步后到达另一个方格. 不妨假设这两个方格分别为 (a,b) 和 $(a+2,b+2)$.

如图 50.4,瘸腿鸟由 (a,b) 到 $(a+2,b+2)$ 的路只有一条,不妨设为

$$(a,b)\to(a,b+1)\to(a+1,b+1)\to$$
$$(a+1,b+2)\to(a+2,b+2)$$

因此,$(a,b+1)$ 的颜色为 B.

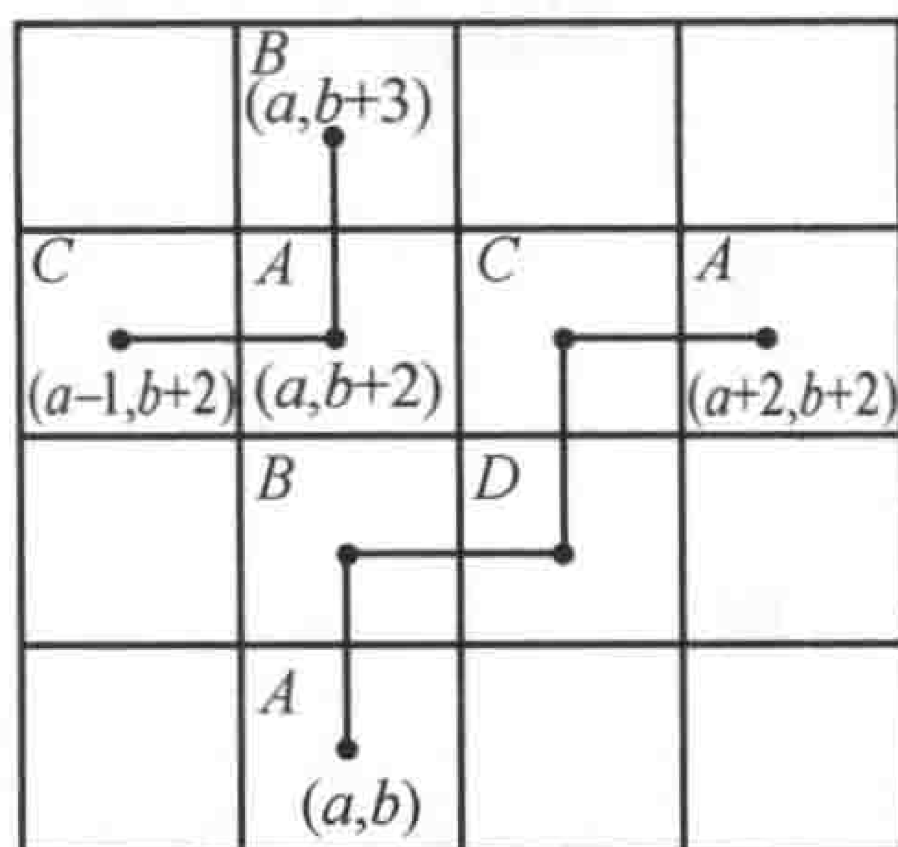


图 50.4

下面考虑颜色为 A 的方格 $(a,b+2)$.

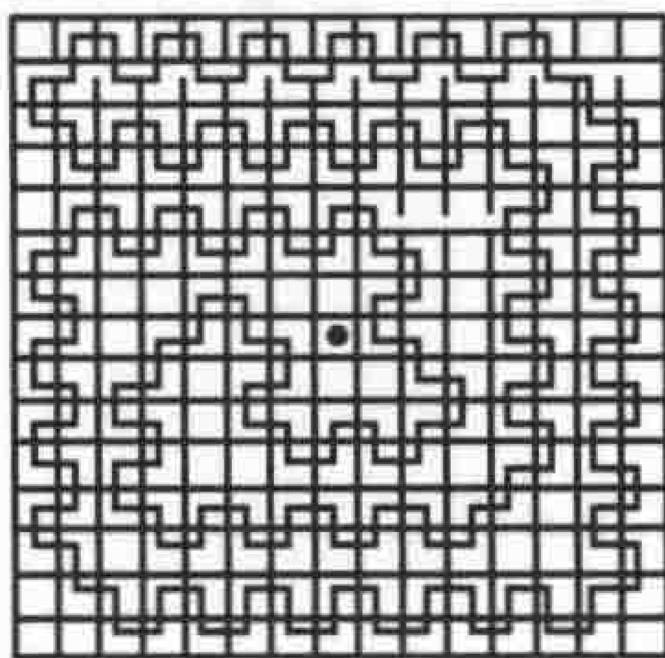
在第一种情况中,瘸腿鸟经过 A 后一定经过 B,则其经过 $(a,b+2)$ 的路一定是

$$(a-1,b+2)\to(a,b+2)\to(a,b+3)$$

于是,联结这两条折线的路一定是联结 $(a,b+3)$ 与 (a,b) 的路和联结 $(a+2,b+2)$ 和 $(a-1,b+2)$ 的路. 但是,这四个单位正方形的中心是一个凸四边形相对的顶点,且路是在这个四边形的外部,故这两条路一定是相交的.

从而,可得下列结论:

联结 $(a,b+3)$ 与 (a,b) 的路与联结这两个点的线段构成一个闭圈,使 $(a-1,b+2)$ 和 $(a+2,b+2)$ 一个在其内部,一个在其外部. 于是,联结这两个点的路一定会穿过前面的闭圈,即交点被瘸腿鸟经过了两次,矛盾.


图 50.5

因此,瘸腿鸟经过方格数目最多有 $4(499^2-1)$ 个.

其次,给出恰经过 $4(499^2-1)$ 个方格的路的例子.

下面的图 50.5 表明,对于

$$n\equiv 3 \pmod 4$$

$n\times n$ 的棋盘可以用递归的方法构造出一条满足条件的路,且恰不经过一个颜色为 A 的方格(图 50.5 所示的是 15×15 的棋盘,中心标黑点的方格即为没经过的颜色为 A 的方格).

于是,当 $n=999$ 时,这条路恰经过了 $4(499^2-1)$ 个方格.

7 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相同的正整数. M 是有 $n-1$ 个元素的正整数集,且不含数

$$s=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

一只蚱蜢沿着实数轴从原点 0 开始向右跳跃 n 步,它的跳跃距离是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的某个排列. 证明:可以选择一种排列,使得蚱蜢跳跃落下的点所表示的数都不在集 M 中.

解 对正整数 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, $M=\varnothing$, 结论当然成立.

当 $n=2$ 时, M 只有一个数 $m(\neq a_1+a_2)$, a_1, a_2 中必有一个不等于 m, 把它放在第一步即可.

假设对于任意 $n<k(k\geqslant 3)$ 结论都成立.

不妨设

$$a_1<a_2<\cdots<a_k$$

令

$$s_i=\sum_{j=1}^{i}a_j$$

则

$$s_k=s$$

假设蚱蜢先按照 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的顺序来跳, 如果

$$(0,s]=(0,s_k]$$

中只有 $k-2$ 个 M 中的数, 那么依据归纳假设结论成立. 以下设 $(0,s_k]$ 中有 $k-1$ 个 M 中的数, 这 $k-1$ 个数为

$$0<m_1<m_2<\cdots<m_{k-1}<s$$

下面分两种情形:

情形 1: 如果对于所有

$$1\leqslant i\leqslant k-1$$

都有

$$s_i<m_i$$

特别地, 有

$$s_{k-1}<m_{k-1}$$

(1) 如果 $s_{k-1}\notin M$, 那么由归纳假设可以对前 $k-1$ 步重新调整, 使得蚱蜢没有遇到 M 中的数;

(2) 如果 $s_{k-1}\in M$, 对于任意 $1\leqslant i\leqslant k-1$, 都有

$$s_{k-1}-a_i<s_{k-1}<s_k-a_i$$

由于除了 s_{k-1} 之外只有 $k-2$ 个 M 中的数, 因此存在一个 i_0, 使得 $s_{k-1}-a_{i_0}$, $s_k-a_{i_0}$ 都不属于 M. 我们将 a_{i_0} 换到最后一步, a_k 为倒数第二步, 这样从目的地倒退两步都没遇到 M 中的数, 由于

$$s_k-a_k-a_{i_0}<s_{k-1}\leqslant m_{k-2}$$

由归纳假设可以调整前 $k-2$ 步使得蚱蜢没遇到 M 中的数.

情形 2: 存在一个 i 使得 $s_i\geqslant m_i$. 假设 t 是满足这样条件的最小下标.

(1) 如果 $t=1$, 也即

$$s_1=a_1\in M$$

由于

$$|M|<k$$

因此必有一个 $a_{i_1} \notin M$,我们将 a_{i_1} 调整到第一步,由于

$$m_1 \leqslant a_1 \leqslant a_{i_1}$$

由归纳假设可以调整后 $k-1$ 步使得蚱蜢没遇到 M 中的数;

(2) 如果 $t>1$,由 t 的最小性可知

$$s_{t-1} < m_{t-1}$$

由归纳假设可以调整前 t 步的顺序,使得他们得以避开 M 中的前 $t-1$ 个数,而且同情形 1 中的(2),我们还可以使得 a_t 位于第 t 步或第 $t-1$ 步,故调整后,前 $t-2$ 步所走距离 $< s_{t-1} < m_{t-1}$,因此前 $t-2$ 步也不可能遇到 M 中后 $k-t$ 个数.

如果第 $t-1$ 步也没有走到 M 中的数上,由归纳假设可以调整后 $k-t+1$ 步使得它们避开 M 中后 $k-t$ 个数. 由于后面的步长都大于 a_t,因此调整后,后面的 $k-t+1$ 步也不会遇到 M 中的前 $t-1$ 个数,因此就避开了所有 M 中的数.

如果第 $t-1$ 步恰好走到 M 中的数上,由于已经避开了 M 中的前 $t-1$ 个数,因此这个数属于 M 中后 $k-t$ 个数,这从另一方面说明了此时的 $t-1$ 步所走的总距离大于 m_{t-1},且由此知 a_t 必须位于第 $t-1$ 步. 此时后面的 $k-t$ 步中的任意第 r 步都比第 $t-1$ 步长,因此将第 r 步和第 $t-1$ 步对换位置之后也肯定避开了 M 中的前 $t-1$ 个数. 由于此时第 $t-1$ 步已经遇到了 M 中后 $k-t$ 个数中的一个数,因此肯定可以选到后 $k-t$ 步中的一步,使得它与第 $t-1$ 步对换之后,第 $t-1$ 步没有遇到 M 中的后 $k-t$ 个数,故此时前 $t-1$ 步都成功避开了 M 中的所有数,并且此时 $t-1$ 步所走总距离大于 m_{t-1},也即至少已经跨越了前 $t-1$ 个 M 中的数. 后一段最多还有 $k-t$ 个 M 中的数,由归纳假设可以对后 $k-t+1$ 步进行调整,使得它们可以避开所有 M 中的数.

综上所述,结论成立.

8 对于任意的整数 $n(n \geqslant 2)$,用下列方式来计算 $h(n)$(设 n 最右端的数码为 r):

(1) 若 $r=0$,则 $h(n)$ 去掉 n 最右端的数码 0 得到的数;

(2) 若 $1 \leqslant r \leqslant q$,将 n 分成两部分,使得右端的部分 R 满足每个数码都不小于 r,且使得 R 最大,而左端的部分 L 要么是空的,要么最右端的数码小于 r,则 $h(n)$ 为 L 及在其后面连续写两次 $R-1$ 得到的数(如数 $n=17\ 151\ 345\ 543$,则 $L=17\ 151$,$R=345\ 543$,故 $h(n)=17\ 151\ 345\ 542\ 345\ 542$).

证明:从任意一个整数 $n(n \geqslant 2)$ 开始,重复计算 $h(n)$ 有限次以后能得到数 1.

解 可以认为将 $n(n \geqslant 2)$ 写成数码串的形式和写成数字串

的形式是一样的，并将 h 的定义延拓到对于所有非空的从 0 至 9 的数码串.

对于两个函数 f,g，定义 $g\otimes f$ 满足：对于所有的串 x，有

$$(g\otimes f)(x)=g(f(x))$$

对于非负整数 n，f^n 表示 n 次迭代. 对于任意的串 x，设 $p(x)$ 是 x 的最小的数码，对于空串 ε，设

$$p(\varepsilon)=\infty$$

定义 9 个函数

$$g_1,g_2,\cdots,g_9$$

如下：

设 $k\in\{1,2,\cdots,9\}$，x 是一个串，将 x 写成

$$x=yzr$$

其中，y 要么是空串，要么最后一个数码小于 k，有

$$p(z)\geqslant k$$

r 是 x 最右端的数码，则

$$g_k(x)=zr$$

引理 1　对于 $k=1,2,\cdots,9$，$g_k\otimes h=g_k\otimes h\otimes g_k$ 成立.

引理的证明　设 $x=yzr$ 满足关于 g_k 的定义，若 $y=\varepsilon$，则

$$g_k(x)=x$$

于是

$$g_k(h(x))=g_k(h(g_k(x)))\qquad ①$$

若 $y\neq\varepsilon$，分两种情况：

(1) 若 z 包含一个小于 r 的数码，设

$$z=uav$$

其中

$$a<r,p(v)\geqslant r$$

则

$$h(x)=\begin{cases}yuav,r=0\\yuav(r-1)v(r-1),r>0\end{cases}$$

$$h(g_k(x))=h(zr)=h(uavr)=\begin{cases}uav,r=0\\uav(r-1)v(r-1),r>0\end{cases}$$

因为 y 的最后一个数码小于 k，所以，式 ① 成立.

(2) 若 z 不包含小于 r 的数码，设

$$y=uv$$

其中，u 要么是空串，要么最后一个数码小于 r，且

$$p(v)\geqslant r$$

则

$$h(x)=\begin{cases}uvz, r=0\\ uvz(r-1)vz(r-1), r>0\end{cases}$$

$$h(g_k(x))=h(zr)=\begin{cases}z, r=0\\ z(r-1)z(r-1), r>0\end{cases}$$

考虑到 y 的定义，可知 uv 的最后一个数码小于 k，且 v 的所有数码至少为 r.

若 $r>k$，则 $v=\varepsilon$. 于是，u 的最后一个数码小于 k. 从而

$$g_k(h(x))=z(r-1)z(r-1)=g_k(h(g_k(x)))$$

若 $r\leqslant k$，则当 $r=0$ 时

$$g_k(h(x))=z=g_k(h(g_k(x)))$$

当 $r>0$ 时

$$g_k(h(x))=z(r-1)=g_k(h(g_k(x)))$$

因此，两种情况下式 ① 均成立.

引理 2 $k\in\{1,2,\cdots,9\}$，x 是一个非空串，n 是一个正整数. 若 $h^n(x)=\varepsilon$，则

$$(g_k\otimes h)^n(x)=\varepsilon$$

引理 2 的证明 对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时

$$\varepsilon=h(x)=g_k(h(x))=(g_k\otimes h)(x)$$

假设当 $n-1(n\geqslant 2)$ 时，结论成立.

下面证明：若 $h^n(x)=\varepsilon$，则

$$(g_k\otimes h)^n(x)=\varepsilon$$

设 $y=h(x)$，由

$$h^n(x)=\varepsilon$$

可得

$$h^{n-1}(y)=\varepsilon$$

由归纳假设可得

$$\begin{aligned}\varepsilon=&(g_k\otimes h)^{n-2}((g_k\otimes h)(y))=\\&(g_k\otimes h)^{n-2}g_k(h(y))=\\&(g_k\otimes h)^{n-2}g_k(h(g_k(y)))=\\&(g_k\otimes h)^{n-2}g_k(h(g_k(h(x))))=\\&(g_k\otimes h)^n(x)\end{aligned}$$

这就完成了数学归纳法的证明.

若对于某个非负整数 n，有 $h^n(x)=\varepsilon$，则称非空串 x 是"停止的".

引理 3 设 $x=yzr$，其中，$p(y)\geqslant k$，$p(z)\geqslant k$，y 的最后一个

数码为 k，且 z 有可能是空的.

若 y 和 zr 是停止的，则 x 是停止的.

引理 3 的证明 假设 y 和 zr 是停止的，对 k 用数学归纳法.

当 $k=0$ 时，设

$$h^n(zr)=\varepsilon$$

对于任意非空的串 w，有

$$h(yw)=yh(w)$$

于是，对于 $m=1,2,\cdots,n$，用数学归纳法容易得到

$$h^m(yzr)=yh^m(zr)$$

因此

$$h^n(yzr)=y$$

因 y 是停止的，所以，$x=yzr$ 是停止的.

假设对于所有的小于 k 的非负整数结论成立.

下面证明：对于 $k(k\geqslant 1)$ 结论也成立. 只需证明：$yg_k(h(zr))$ 是停止的.

事实上，

(1) 若 $r=0$，则

$$h(yzr)=yz=yg_k(h(zr))$$

(2) 若 $0<r\leqslant k$，则

$$h(zr)=z(r-1)z(r-1)$$

$$g_k(h(zr))=z(r-1)$$

故

$$h(yzr)=yz(r-1)yz(r-1)=$$
$$yg_k(h(zr))yg_k(h(zr))$$

若 $yg_k(h(zr))$ 是停止的，由归纳假设

$$yg_k(h(zr))yg_k(h(zr))$$

是停止的，从而，$h(yzr)$ 是停止的.

(3) 若 $r>k$，则

$$h(yzr)=yh(zr)=yg_k(h(zr))$$

注意到 $yg_k(h(zr))$ 有 $yz'r'$ 的形式，其中

$$p(z')\geqslant k$$

类似地，只需证明

$$yg_k(h(z'r'))=y(g_k\otimes h)^2(zr)$$

是停止的.

从而，由归纳的方式得，只要证明：存在某个正整数 m，使 $y(g_k\otimes h)^m(zr)$ 是停止的.

由引理 2 知，存在某个正整数 m，使得

$$(g_k\otimes h)^m(zr)=\varepsilon$$

则由 y 是停止的，知 $x=yzr$ 是停止的.

回到原题.

假设存在某个串 x 不是停止的,可选择一个最小的 x.

若 $x \geqslant 10$,则可以将 x 按照引理 3 的条件写成 $x = yzr$ 的形式.

因为 y 和 zr 比 x 小,所以,y 和 zr 都是停止的. 由引理 3,x 是停止的,矛盾.

若 $x \leqslant 9$,则

$$h(x) = (x-1)(x-1)$$

由引理 3 仍然可得 x 是停止的,矛盾.

由于空串只可能是由

$$1 \xrightarrow{h} 00 \xrightarrow{h} 0 \xrightarrow{h} \varepsilon$$

得到,故重复计算 $h(n)$ 有限次以后能得到 1.

几何部分

1 在 $\triangle ABC$ 中,$AB = AC$,AD,BE 分别是 $\angle CAB$ 和 $\angle ABC$ 的平分线. K 是 $\triangle ADC$ 的内心,假设 $\angle BEK = 45°$,求 $\angle CAB$ 所能取到的所有值(图 50.6,50.7).

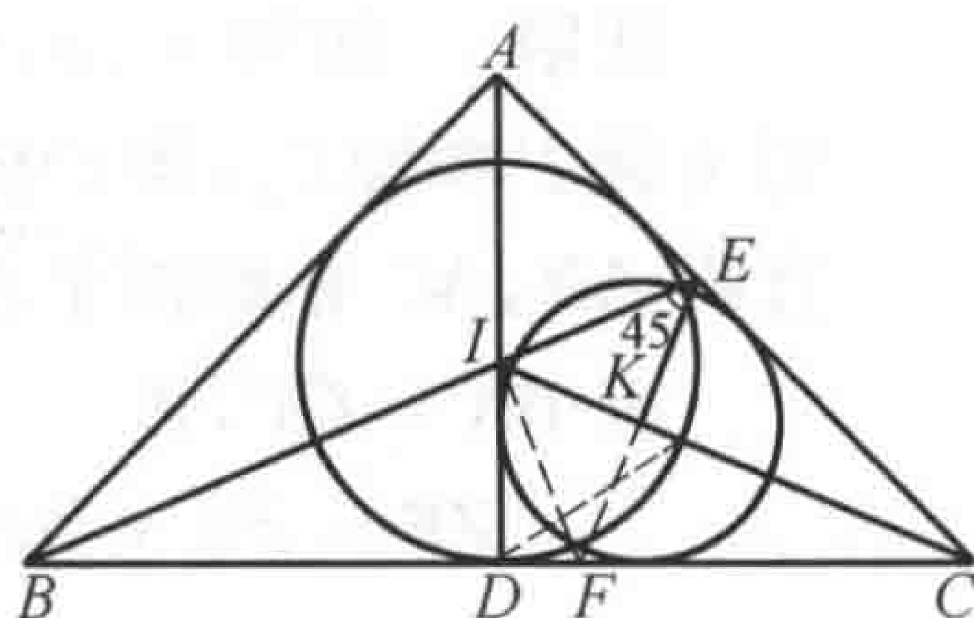


图 50.6

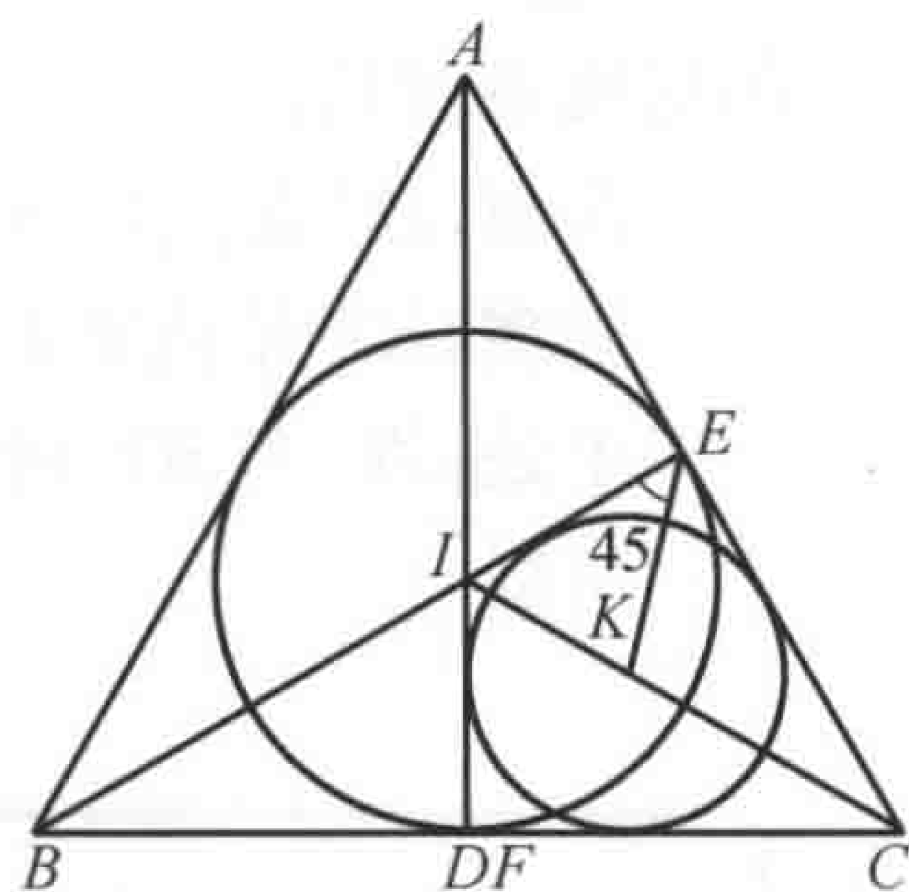


图 50.7

证明 此题答案与本届 IMO 试题的第 4 题答案相同.

2 设 O 是三角形 ABC 的外心. 点 P 和 Q 分别是边 CA 和 AB 的内点. 设 K,L 和 M 分别是线段 BP,CQ 和 PQ 的中点,Γ 是过点 K,L 和 M 的圆. 若直线 PQ 与圆 Γ 相切,证明:$OP = OQ$(图 50.8).

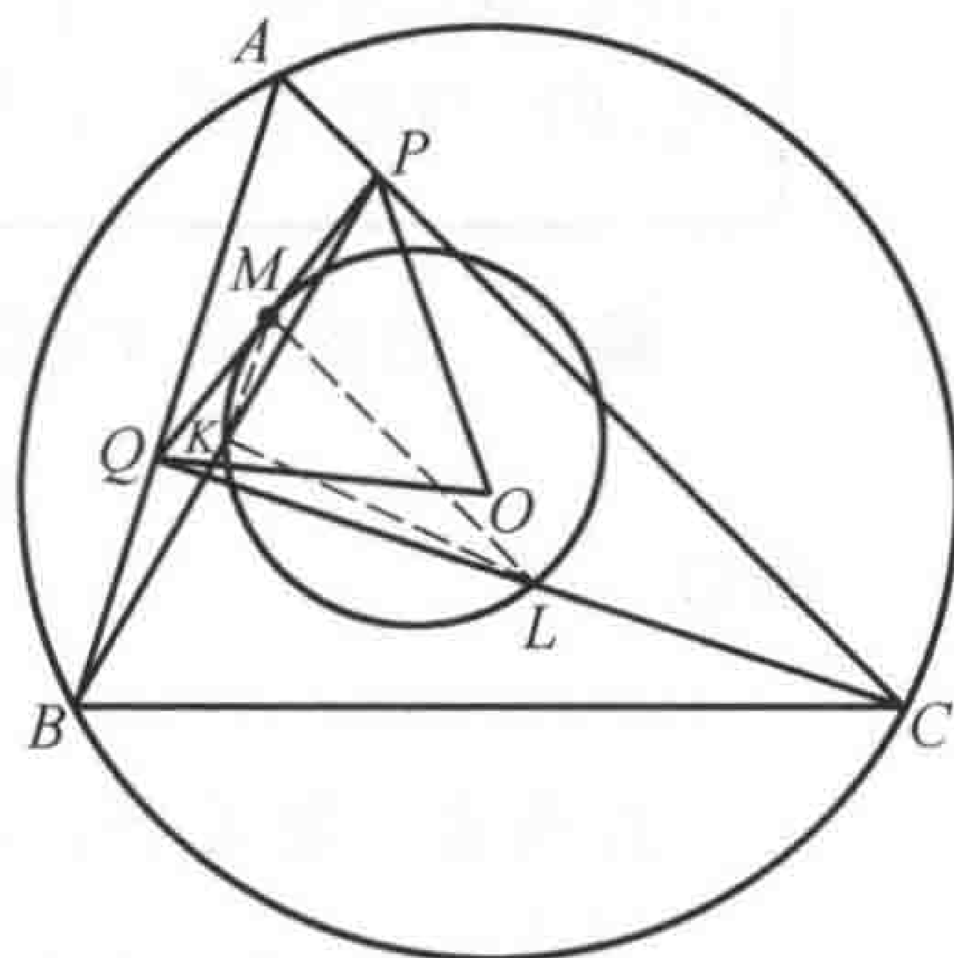


图 50.8

解 直线 PQ 与圆 Γ 相切的充分必要条件是

$$\angle MLK = \angle QMK$$

因为

$$MK \parallel AB$$

所以

$$\angle AQP = \angle QMK = \angle MLK$$

同理可得

$$\angle APQ = \angle MKL$$

故

$$\triangle APQ \backsim \triangle MKL$$

所以

$$\frac{AP}{AQ}=\frac{MK}{ML}=\frac{\frac{QB}{2}}{\frac{PC}{2}}=\frac{QB}{PC}$$

即

$$AP\cdot PC=AQ\cdot QB$$

所以，点 P,Q 关于三角形 ABC 的外接圆的幂相等，从而

$$OP=OQ$$

❸ 已知 $\triangle ABC$ 的内切圆分别与边 AB,AC 切于点 Z,Y，BY 与 CZ 交于点 G，点 R,S 满足四边形 $BCYR$ 和四边形 $BCSZ$ 是平行四边形. 证明：$GR=GS$.

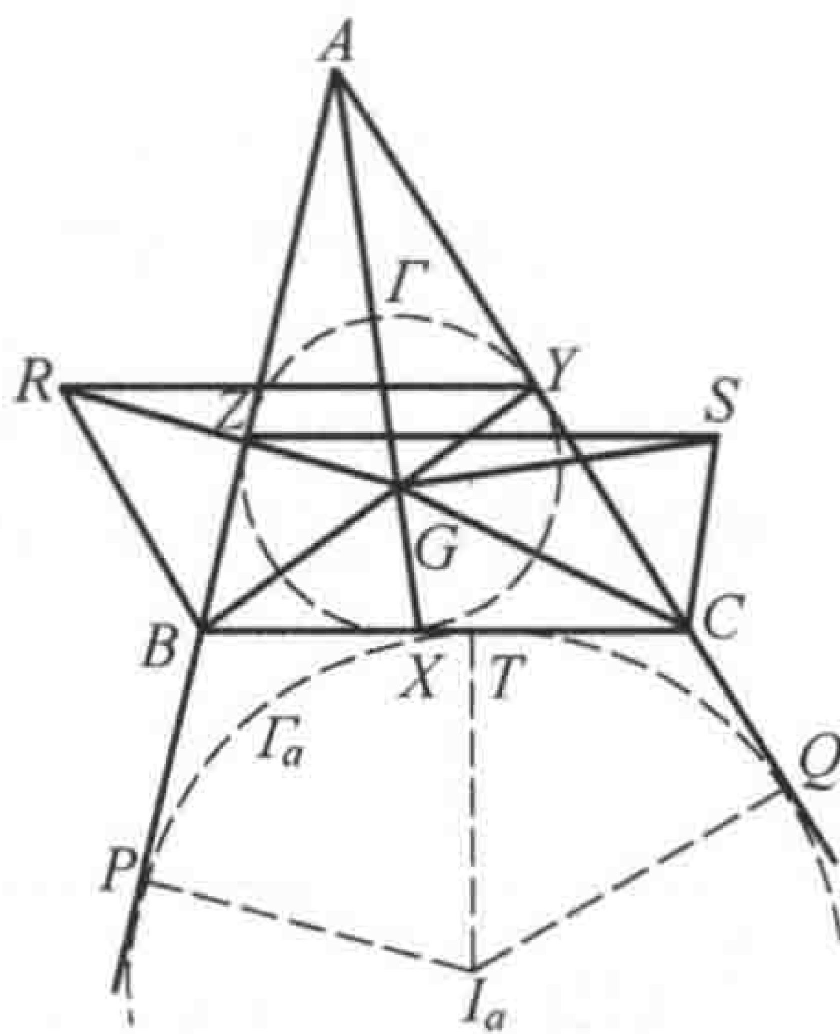


图 50.9

证明　如图 50.9，设 $\triangle ABC$ 的内切圆和 $\angle A$ 内的旁切圆分别为圆 Γ 和圆 Γ_a，圆 Γ 和圆 Γ_a 与边 BC 分别切于点 X,T，圆 Γ_a 与直线 AB,AC 分别切于点 P,Q.

由 $BX=CT$，得

$$ZP=ZB+BP=XB+BT=BX+CX=ZS$$
$$CQ=CT=BX=BZ=CS$$

因此，对于点 Z,C，它们到点 S 的距离等于它们向圆 Γ_a 所引的切线段的长.

从而，ZC 是点圆 S 和 Γ_a 的根轴.

同理，BY 是点圆 R 和 Γ_a 的根轴.

于是，ZC 与 BY 的交点 G 为圆 S,R,Γ_a 的根心.

所以

$$GR=GS$$

❹ 已知圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 E，直线 AD 与 BC 交于点 F，G,H 分别为边 AB,CD 的中点. 证明：EF 与过点 E,G,H 的圆切于点 E.

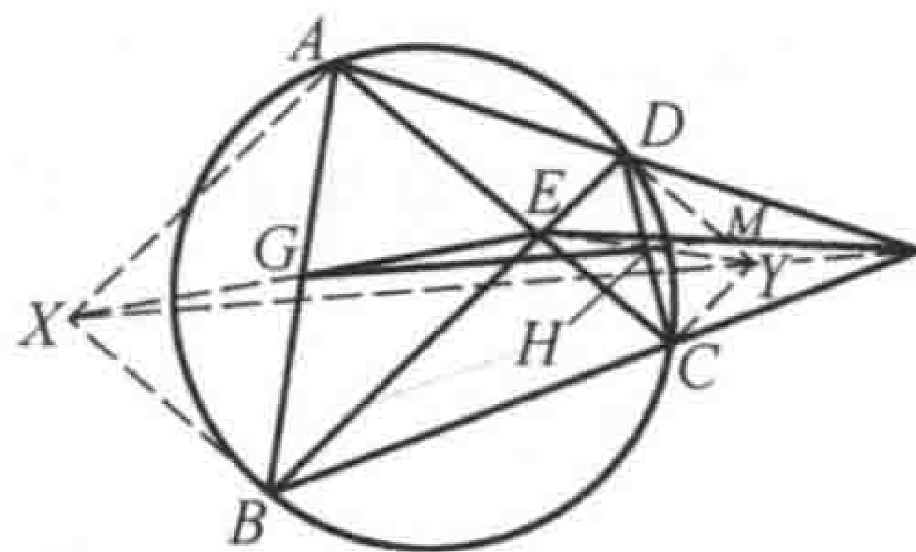


图 50.10

解　如图 50.10. 因为

$$\angle BAD=\angle FCD$$

所以

$$\triangle FAB\backsim\triangle FCD$$

设变换 $\mathscr{T}$ 是关于 $\angle DFC$ 的角平分线作对称后，再以 F 为位似中心，$\frac{FA}{FC}$ 为位似比作的位似变换. 则 $\mathscr{T}$ 将 F 变为 F，C 变为 A，D 变为 B，H 变为 G.

注意到

$$\triangle FCA \backsim \triangle FDB$$

则

$$\frac{FA}{FC}=\frac{FB}{FD}$$

又

$$\angle ADB=\angle ACB$$

故 DE 关于变换 $\mathscr{T}$ 的像是过点 B 且平行于 AC 的线段，CE 关于变换 $\mathscr{T}$ 的像是过点 A 且平行于 BD 的线段.

于是，点 E 的像 X 是 $\square BEAX$ 的第四个顶点.

特别地，有

$$\angle HEF=\angle GXF$$

因为 G 是 $\square BEAX$ 的对角线 AB 的中点，所以，G 也是 EX 的中点.

设 Y 是 $\square DECY$ 的第四个顶点，类似可得 $\mathscr{T}$ 将 Y 变为 E，且 H 是 EY 的中点.

从而

$$HG \,/\!/\, XY$$

又因为 FX，FE 关于 $\angle DFC$ 的角平分线对称，FY，FE 关于 $\angle DFC$ 的角平分线对称，所以，F，X，Y 三点共线，故

$$\angle GXF=\angle EGH$$

由

$$\angle HEF=\angle EGH$$

知 EF 与过点 E，G，H 的圆切于点 E.

5 设 P 是关于点 O 对称的凸多边形. 证明：存在满足 $P\subset R$ 的平行四边形 R，有 $\frac{|R|}{|P|}\leqslant\sqrt{2}$（$|R|$，$|P|$ 分别表示 R，P 的面积）.

解 构造包含 P 的平行四边形 R_1，R_3，使

$$|R_1|\leqslant\sqrt{2}\,|P| \text{ 和 } |R_3|\leqslant\sqrt{2}\,|P|$$

至少有一个成立.

选择属于 P 的两个点 A，B，使得 $\triangle OAB$ 的面积最大.

如图 50.11，设过 A 且平行于 OB 的直线为 a，过 B 且平行于 OA 的直线为 b. A'，B' 分别是 A，B 关于点 O 的对称点，a'，b' 分别是 a，b 关于点 O 的对称直线. 设由 a，b，a'，b' 交出的平行四边形为 R_1.

显然，A，B 在 P 的边界上，A，B，A'，B' 是平行四边形 R_1 的四条边的中点，且 $P\subset R_1$. 否则，若存在一点 $Z\in P$，且 $Z\notin R_1$，则点

O,Z 在 a,b,a',b' 中的一条直线的两侧(不妨设为 a).

于是

$$S_{\triangle OZB}>S_{\triangle OAB}$$

这与点 A,B 的选择矛盾.

设 R_2 为 $\square ABA'B'$,因为点 $A,B\in P$,所以,线段 $AB\subset P$. 于是,$R_2\subset R_1$,且

$$|R_1|=2|R_2| \quad ①$$

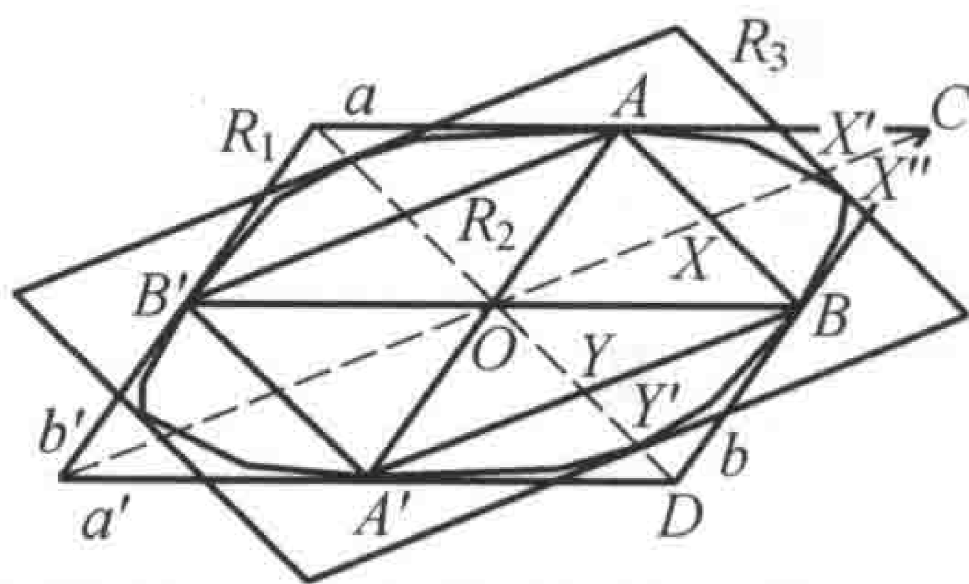


图 50.11

设 R_3 是边分别平行于 AB,BA' 且包含 P 的最小的平行四边形. 则 $R_2\subset R_3$,且 R_3 的每条边至少包含 P 的边界上的一个点.

设直线 a 与 b 交于点 C,AB 与 OC 交于点 X,X' 是 XC 与 R_3 的边界的交点.

类似地,设直线 b 与 a' 交于点 D,$A'B$ 与 OD 交于点 Y,Y' 是 YD 与 R_3 的边界的交点.

注意到

$$OC=2OX,OD=2OY$$

于是,存在实数 x,y 满足

$$1\leqslant x,y\leqslant 2$$

且

$$OX'=xOX,OY'=yOY$$

由于 R_3 与 R_2 的对应边平行,则

$$|R_3|=xy|R_2| \quad ②$$

考虑到 R_3 包含 X' 的边与 P 至少有一个交点 X''. 由 P 的凸性可得

$$\triangle AX''B\subset P$$

结合平行四边形 R_3 的这条边与 AB 平行,则

$$S_{\triangle AX''B}=S_{\triangle AX'B}$$

从而,$|OAX'B|$ 不超过由射线 OA,OB 确定的扇形区域与 P 的交集所得区域面积.

同理,$|OBY'A'|$ 不超过由射线 OB,OA' 确定的扇形区域与 P 的交集所得区域面积.

再结合

$$|OAX'B|=xS_{\triangle OAB}$$
$$|OBY'A'|=yS_{\triangle OBA'}$$
$$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OBA'}$$

得

$$|P|\geqslant 2|AX'BY'A'|=2(xS_{\triangle OAB}+yS_{\triangle OBA'})=$$
$$4\cdot\frac{x+y}{2}S_{\triangle OAB}=\frac{x+y}{2}|R_2|$$

即

$$\frac{x+y}{2}|R_2| \leqslant |P| \quad ③$$

由式 ①,②,③ 及均值不等式得

$$|R_1||R_3|=2|R_2|\cdot xy|R_2|\leqslant$$
$$2|R_2|^2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\leqslant 2|P|^2$$

这表明

$$|R_1|\leqslant\sqrt{2}|P|$$

与

$$|R_3|\leqslant\sqrt{2}|P|$$

至少有一个成立.

6 设四边形 $ABCD$ 的边 AD 与 BC 交于点 P,且 AB 与 CD 不平行,$\triangle ABP$,$\triangle DCP$ 的外心分别为 O_1,O_2,垂心分别为 H_1,H_2,E_1,E_2 分别为线段 O_1H_1,O_2H_2 的中点.证明:过 E_1 且垂直于 CD 的直线,过 E_2 垂直于 AB 的直线与 H_1H_2 三线共点.

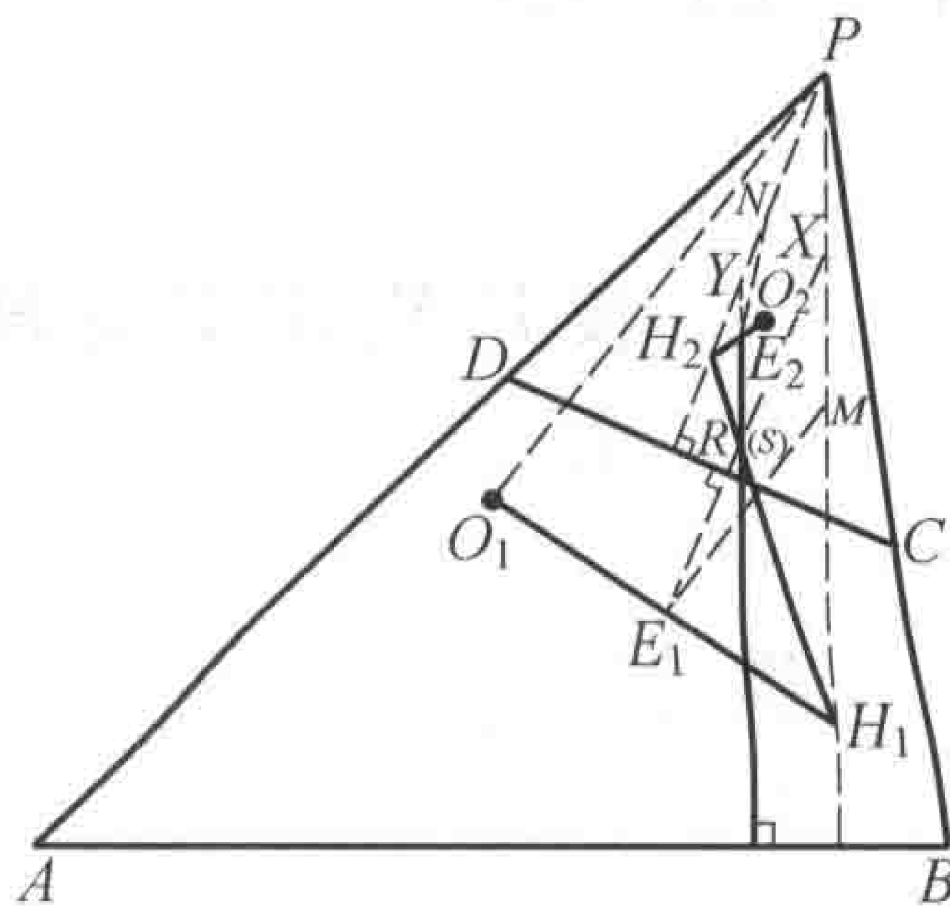


图 50.12

解 如图 50.12,设过点 E_1 作 CD 的垂线与 PH_1 交于点 X,过 E_2 作 AB 的垂线与 PH_2 交于点 Y.设直线 AB 与 DC 的夹角为 φ,M,N 分别为 PH_1,PH_2 的中点.

设

$$\angle H_2PD=\alpha,\angle H_1PC=\beta,\angle DPC=\gamma$$

则

$$\angle E_1XH_1=\angle H_2YE_2=\varphi$$

且

$$\varphi=\gamma-\alpha-\beta$$

因为 E_1 是 $\triangle ABP$ 的九点圆的圆心,所以

$$PO_1 /\!/ ME_1$$

结合

$$\angle APO_1=\angle BPH_1$$

得

$$\angle E_1MH_1=\gamma-2\beta$$

类似地

$$\angle E_2NH_2=\gamma-2\alpha$$

故

$$\angle XE_1M=(\gamma-2\beta)-\varphi=$$
$$\varphi-(\gamma-2\alpha)=\angle YE_2N$$

在 $\triangle E_1XM$ 和 $\triangle E_2YN$ 中分别应用正弦定理得

$$\frac{XM}{ME_1}=\frac{\sin\angle XE_1M}{\sin\angle E_1XH_1}=\frac{\sin\angle YE_2N}{\sin\angle E_2YH_2}=\frac{YN}{NE_2}$$

由于

$$PH_1=2O_1P\cos\gamma=4ME_1\mid\cos\gamma\mid$$
$$PH_2=2O_2P\cos\gamma=4NE_2\mid\cos\gamma\mid$$

则

$$\frac{ME_1}{PH_1}=\frac{1}{4\mid\cos\gamma\mid}=\frac{NE_2}{PH_2}$$

故

$$\frac{XM}{PH_1}=\frac{YN}{PH_2}$$

上式等价于

$$\frac{PX}{XH_1}=\frac{H_2Y}{YP}$$

设 E_1X_1,E_2Y 与 H_1H_2 分别交于点 R,S.

由

$$PH_2\,/\!/\,XR$$

得

$$\frac{H_2R}{RH_1}=\frac{PX}{XH_1}$$

又由

$$PH_1\,/\!/\,YS$$

得

$$\frac{H_2S}{SH_1}=\frac{H_2Y}{YP}$$

于是,点 R 与 S 重合.

7 已知 $\triangle ABC$ 的内心为 I,X,Y,Z 分别为 $\triangle BIC$,$\triangle CIA$,$\triangle AIB$ 的内心.证明:若 $\triangle XYZ$ 是正三角形,则 $\triangle ABC$ 也是正三角形.

解 如图 50.13,由于 AZ,AI,AY 四等分 $\angle BAC$,可设 $\angle BAC=4\alpha$.

类似地,设

$$\angle ABC=4\beta,\angle BCA=4\gamma$$

则

$$\alpha+\beta+\gamma=45^\circ$$

且

$$0^\circ<\alpha,\beta,\gamma<45^\circ$$

因为

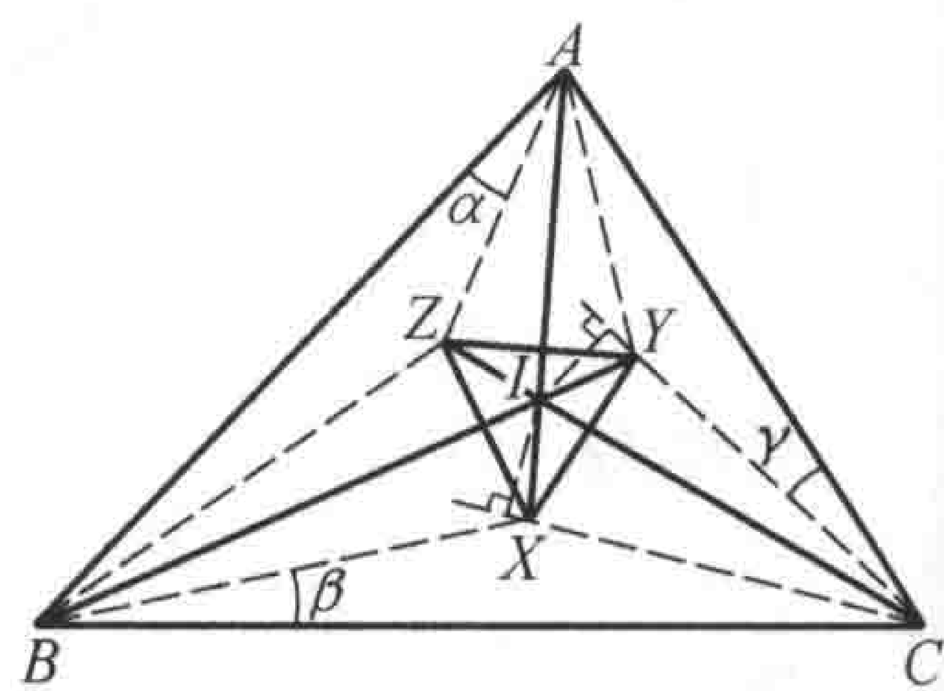


图 50.13

$$\angle BIC = 90^\circ + 2\alpha$$

所以

$$\angle XIC = \angle BIX = 45^\circ + \alpha$$

类似地

$$\angle CIY = \angle YIA = 45^\circ + \beta$$

于是

$$\angle XIY = 90^\circ + \alpha + \beta = 135^\circ - \gamma$$

类似地

$$\angle YIZ = 135^\circ - \alpha, \angle ZIX = 135^\circ - \beta$$

注意到点 I 到 CX 的距离等于

$$IX\sin\angle CXI = IX\sin(90^\circ + \beta) = IX\cos\beta$$

同理,点 I 到 CY 的距离等于 $IY\cos\alpha$.

所以

$$IX\cos\beta = IY\cos\alpha$$

为了计算方便,选择一个长度单位,使得

$$IX = \cos\alpha, IY = \cos\beta$$

类似地

$$IZ = \cos\gamma$$

由于 $\triangle XYZ$ 是正三角形,则在 $\triangle XYI$ 和 $\triangle YZI$ 中分别应用余弦定理,由

$$ZX^2 = ZY^2$$

可得

$$IZ^2 + IX^2 - 2IZ \cdot IX\cos\angle ZIX = $$
$$IZ^2 + IY^2 - 2IZ \cdot IY\cos\angle YIZ$$

即

$$IX^2 - IY^2 = 2IZ(IX\cos\angle ZIX - IY\cos\angle YIZ)$$

故

$$\cos^2\alpha - \cos^2\beta =$$
$$2\cos\gamma[\cos\alpha \cdot \cos(135^\circ - \beta) - \cos\beta \cdot \cos(135^\circ - \alpha)] \Rightarrow$$
$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta - \alpha) =$$
$$\cos\gamma[\cos(\alpha - \beta + 135^\circ) - \cos(\beta - \alpha + 135^\circ)] =$$
$$2\cos\gamma \cdot \sin 135^\circ \cdot \sin(\beta - \alpha) \Rightarrow$$
$$\sin(45^\circ - \gamma) \cdot \sin(\beta - \alpha) = \sqrt{2}\cos\gamma \cdot \sin(\beta - \alpha) \Rightarrow$$
$$\sin(\beta - \alpha)(\cos\gamma + \sin\gamma) = 0 \Rightarrow \sin(\beta - \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$$

类似地

$$\alpha = \gamma$$

这就意味着 $\triangle ABC$ 是正三角形.

8 设四边形 $ABCD$ 有内切圆，过点 A 的直线 g 与线段 BC，DC 分别交于点 M,N,I_1,I_2,I_3 分别为 $\triangle ABM,\triangle MNC,\triangle NDA$ 的内心. 证明：$\triangle I_1I_2I_3$ 的垂心在直线 g 上.

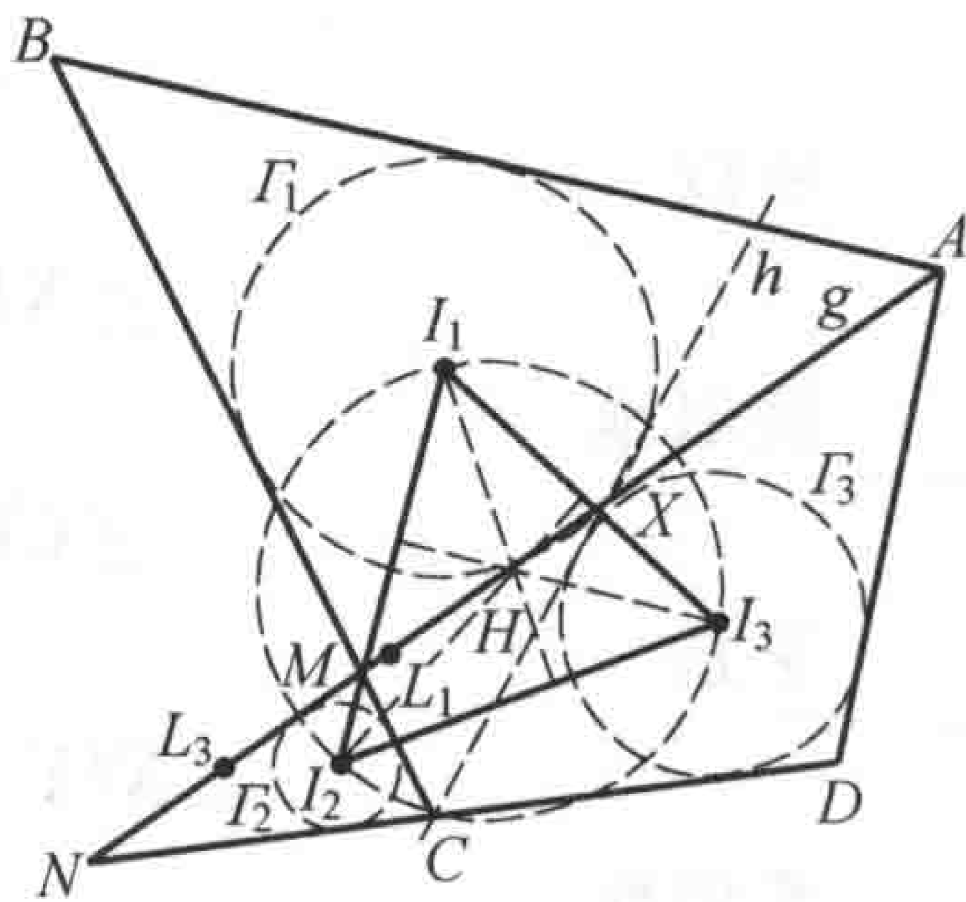


图 50.14

解 如图 50.14，设 $\triangle ABM,\triangle MNC,\triangle NDA$ 的内切圆分别为圆 $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$.

首先证明：由点 C 向圆 Γ_1 引不同于 CB 的切线 h，则 h 也与圆 Γ_3 相切.

设直线 g 与 h 交于点 X，则四边形 $ABCX$ 和四边形 $ABCD$ 均有内切圆. 于是

$$CD-CX=(AB+CD)-(AB+CX)=(BC+AD)-(BC+AX)=AD-AX$$

即

$$AX+CD=CX+AD$$

从而，四边形 $AXCD$ 有内切圆，即 h 与圆 Γ_3 相切.

由于 N,I_2,I_3 三点共线，则

$$\angle I_3CI_1=\frac{1}{2}(\angle DCX+\angle XCB)=\frac{1}{2}\angle DCB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle MCN)=180^\circ-\angle MI_2N=\angle I_3I_2I_1.$$

于是，C,I_1,I_2,I_3 四点共圆.

设 L_1,L_3 分别是点 C 关于 I_2I_3,I_1I_2 的对称点.

因为 I_1I_2 是 $\angle NMC$ 的角平分线，所以，L_3 在直线 g 上.

类似地，L_1 也在直线 g 上.

设 H 是 $\triangle I_1I_2I_3$ 的垂心，则

$$\angle I_2I_3I_1=\angle I_1CI_2=\angle I_1I_3I_2=180^\circ-\angle I_1HI_2$$

于是，I_2,H,I_1,L_3 四点共圆.

类似地，I_3,H,L_1,I_2 四点共圆.

故

$$\angle L_3HI_2=\angle L_3I_1I_2=\angle I_2I_1C=\angle I_2I_3C=\angle I_2I_3L_1=\angle L_1HI_2$$

由于 $L_1\neq L_3$，则 L_1,L_3,H 三点共线，即点 H 在直线 g 上.

数论部分

1 设 n 是一个正整数，$a_1,a_2,\cdots,a_k(k\geqslant 2)$ 是集合 $\{1,\cdots,n\}$ 中的互不相同的整数，使得对于 $i=1,\cdots,k-1$，都有 n 整除 $a_i(a_{i+1}-1)$. 证明：n 不整除 $a_k(a_1-1)$.

解 用反证法.

假设

$$n \mid a_k(a_1-1)$$

则

$$a_1a_k\equiv a_k(\bmod n)$$

由题设可知

$$a_i\equiv a_ia_{i+1}(\bmod n),i=1,2,\cdots,k-1$$

所以

$$a_1\equiv a_1a_2\equiv a_1a_2a_3\equiv a_1a_2\cdots a_k\equiv a_1a_2\cdots a_{k-2}a_k\equiv a_1a_k(\bmod n)$$

则

$$a_1\equiv a_k(\bmod n)$$

而

$$0<|a_1-a_k|<n$$

矛盾.

2 一个正整数 N，若 $N=1$ 或 N 可写成偶数个素数的乘积(不要求互不相同)，那么我们称 N 为平衡数. 给定正整数 a 和 b，考虑多项式 P，满足 $P(x)=(x+a)(x+b)$.

(1) 证明存在不同的正整数 a,b 使得 $P(1),P(2),\cdots,P(50)$ 都是平衡数.

(2) 证明若对任意正整数 n，$P(n)$ 都是平衡数，则 $a=b$.

解 首先定义正整数集上的一个函数 f，$f(n)=0$，如果 n 是平衡数，否则 $f(n)=1$. 显然，对任意正整数 n,m，我们有

$$f(nm)\equiv f(n)+f(m)\bmod 2$$

(1) 现在对任意正整数 n，考虑二进制数列$(f(n+1),f(n+2),\cdots,f(n+50))$. 由于共有 2^{50} 种不同的二进制数列，从而必定存在不同的正整数 a 和 b，使得

$$(f(a+1),f(a+2),\cdots,f(a+50))\equiv(f(b+1),f(b+2),\cdots,f(b+50))$$

而

$$f(P(k))\equiv f(a+k)+f(b+k)\equiv 0(\bmod 2)$$

这正好意味着 $P(1),P(2),\cdots,P(50)$ 都是平衡数.

(2) 若对任意正整数 $n,P(n)$ 都是平衡数且 $a<b$. 取

$$n=k(b-a)-a$$

其中 k 是一个能保证 n 是正整数的足够大的数. 则

$$P(n)=k(k+1)(b-a)^2$$

而 $P(n)$ 是平衡数当且仅当

$$f(k)=f(k+1)$$

因此,数列对于足够大的 $k,f(k)$ 必须是常数数列. 但这是不可能的,因为对于任意素数 $p,f(p)=1$. 但对于平方数 t^2,我们有 $f(t^2)=0$.

从而 $a=b$.

注 给定一个正整数 k,我们用计算机可以求出数对(a,b),满足 $P(1),P(2),\cdots,P(k)$ 都是平衡数且 $a+b$ 达到最小,且 $a<b$.

k	3	4	5	10	20
(a,b)	(2,4)	(6,11)	(8,14)	(20,34)	(1 751,3 121)

因此在情形(1) 中,我们可能很难用简单的初等的方法找出 a,b.

3 记 f 是一个正整数集到正整数集的非常数函数,满足对任意不同的正整数,我们都有 $a-b$ 能被 $f(a)-f(b)$ 整除. 证明存在无限个素数 p,使得存在某个正整数 c,使 p 能被 $f(c)$ 整除.

解法 1 记 $v_p(a)$ 是 a 的素数分解中,p 的指数. 假若只有有限个素数 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 能被 f 的某个函数值整除.

首先由于存在无限个正整数 a,满足

$$v_{p_i}(a)>v_{p_i}(f(1))$$

任意 $i=1,2,\cdots,m$(比如我们可以取 $a=(p_1p_2\cdots p_m)^a$,且取 a 足够大). 取这样的 a,由题的条件我们知道

$$a\mid f(a+1)-f(1)$$

若

$$f(a+1)\neq f(1)$$

则必然存在某个 i,有

$$v_{p_i}(f(a+1))\neq v_{p_i}(f(1))$$

从而

$$v_{p_i}(f(a+1)-f(1))=\min\{v_{p_i}(f(a+1)),\\ v_{p_i}(f(1))\}\leqslant v_{p_i}(f(1))<v_{p_i}(a)$$

但是这与

$$a \mid f(a+1)-f(1)$$

矛盾.

从而对于任意这样的 a，我们有

$$f(a+1)=f(1)$$

而对于任意正整数 b 和这样的 a，我们有

$$(a+1-b) \mid (f(a+1)-f(b))$$

或者说

$$(a+1-b) \mid (f(1)-f(b))$$

由于这对无限多个正整数 a 都成立，从而我们必有

$$f(b)=f(1)$$

所以 f 是一个常数函数，矛盾. 因此，我们开始的假设错误，即存在无限个素数 p，使得存在某个正整数 c，使 p 能被 $f(c)$ 整除.

解法 2　假若只有有限个素数 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 能被 f 的某个函数值整除. 由于 f 不恒等于 1，我们有 $m \geqslant 1$. 故存在非负整数 α_1，$\alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 使得

$$f(1)=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$$

我们取某个正整数 r 满足

$$f(r) \neq f(1)$$

记

$$M=1+p_1^{\alpha_1+1}+p_2^{\alpha_2+1} \cdots p_m^{\alpha_m+1} \cdot (f(r)+r)$$

则对任意 $i \in \{1,2,\cdots,m\}$，我们都有 $p_i^{\alpha_i+1}$ 整除 $M-1$，因此由题目条件也整除 $f(M)-f(1)$. 这意味着 $f(M)$ 能被 $p_i^{\alpha_i}$ 整除但不能被 $p_i^{\alpha_i+1}$ 整除，从而

$$f(M)=f(1)$$

因此

$$\begin{aligned} M-r > & p_1^{\alpha_1+1} p_2^{\alpha_2+1} \cdots p_m^{\alpha_m+1} \cdot (f(r)+r)-r \geqslant \\ & p_1^{\alpha_1+1} p_2^{\alpha_2+1} \cdots p_m^{\alpha_m+1}+(f(r)+r)-r > \\ & p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}+f(r) \geqslant \\ & | f(M)-f(r) | \end{aligned}$$

但是 $M-r$ 整除 $f(M)-f(r)$ 意味着

$$f(r)=f(M)=f(1)$$

这与 r 的选择矛盾.

4 求所有的正整数 n,使得存在正整数数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足

$$a_{k+1}=\frac{a_k^2+1}{a_{k-1}+1}-1,2\leqslant k\leqslant n-1$$

解法1 这样的数列存在当且仅当 $n=1,2,3,4$.因为若对于某个 n 存在这样的数列,则对于所有小于 n 的正整数也存在这样的数列,所以我们只需要证明 $n=5$ 是不可能存在这样的数列的,但 $n=4$ 时是存在的.

假设对于 $n=5$ 时,存在这样的数列 $a_1,a_2,\cdots,a_5$ 满足条件

$$a_2^2+1=(a_1+1)(a_3+1)$$
$$a_3^2+1=(a_2+1)(a_4+1)$$
$$a_4^2+1=(a_3+1)(a_5+1)$$

若 a_1 是奇数,则 a_2 也是奇数且

$$a_2^2+1\equiv 2(\bmod 4)$$

从而 a_3 是偶数.但是这就产生了矛盾,因为偶数 a_2+1 不可能被一个奇数a_3^2+1 整除.

从而 a_1 是偶数.

若 a_2 是奇数,则 a_3^2+1 是偶数,即 a_3 是奇数.类似的,我们可以得到 a_4 也是奇数.但是此时 a_3^2+1 是两个偶数 (a_2+1),(a_4+1) 的乘积,从而能被 4 整除,这与

$$a_3^2+1\equiv 2(\bmod 4)$$

相矛盾.

从而 a_2 是偶数.进一步地 a_3+1 能被奇数 a_2^2+1 整除,从而 a_3 是一个偶数.同理可知,a_4 和 a_5 也是偶数.

现在设

$$x=a_2,y=a_3$$

由题设,我们知道

$$(x+1)\mid(y^2+1)$$

且

$$(y+1)\mid(x^2+1)$$

将会证明不存在正偶数对 (x,y) 满足这两个条件,从而便得出了矛盾.

若存在正偶数对 x_0,y_0 满足条件

$$(x_0+1)\mid(y_0^2+1)$$

和

$$(y_0+1)\mid(x_0^2+1)$$

这样我们就有

$$(x_0+1) \mid (y_0^2+1+x_0^2-1)$$

即

$$(x_0+1) \mid (y_0^2+x_0^2)$$

同样地

$$(y_0+1) \mid (x_0^2+y_0^2)$$

任意 x_0+1 和 y_0+1 的公因数 d 必须整除

$$(x_0^2+1)+(y_0^2+1)-(x_0^2+y_0^2)=2$$

但是 x_0+1 和 y_0+1 都是奇数. 从而 $d=1$. 因此 x_0+1 和 y_0+1 互素，从而存在正整数 k 使得

$$k(x+1)(y+1)=x^2+y^2$$

有正偶数对解(x_0,y_0). 接下来我们证明上述方程没有正偶数对解.

若上述方程存在正偶数对解. 取(x_1,y_1)是所有解中 x_1+y_1 最小的，且 $x_1\geqslant y_1$. 则 x_1 是下述二次方程的一个根

$$x^2-k(y_1+1)x+y_1^2-k(y_1+1)=0$$

记 x_2 是该方程的另一个根，则有韦达定理得

$$x_1+x_2=k(y_1+1)$$

且

$$x_1x_2=y_1^2-k(y_1+1)$$

若 $x_2=0$，则第二个等式变成了

$$y_1^2=k(y_1+1)$$

这是不可能的，因为

$$y_1+1>1$$

不可能被与之互素的 y_1^2 整除. 因此 $x_2\neq 0$.

再者由于

$$(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+x_1+x_2+1=y_1^2+1$$

为奇数，从而 x_2 必须是正偶数，并且

$$x_2+1=\frac{y_1^2+1}{x_1+1}\leqslant\frac{y_1^2+1}{y_1+1}\leqslant y_1\leqslant x_1$$

但是这意味着正偶数对(x',y')(其中 $x'=y_1,y'=x_2$)也是方程

$$k(x+1)(y+1)=x^2+y^2$$

的正偶数对解且

$$x'+y'<x_1+y_1$$

矛盾.

因为有 $n\leqslant 4$. 对 $n=4$ 的情况，比如我们可以取

$$a_1=4,a_2=33,a_3=217,a_4=1\ 384$$

解法 2 首先容易验证当 $n=4$，数列

$$a_1=4,a_2=33,a_3=217,a_4=1\ 384$$

满足条件.假设对于某个 $n\geqslant 5$ 存在这样的数列,则特别地,我们有

$$a_2^2+1=(a_1+1)(a_3+1)$$
$$a_3^2+1=(a_2+1)(a_4+1)$$
$$a_4^2+1=(a_3+1)(a_5+1)$$

进一步地,不失一般性,我们可以在这样的数列(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)中,取 a_1 最小的那个.

首先,我们可以很快地证明如下事实(1):

若 3 个正整数 x,y,z 满足

$$y^2+1=(x+1)(z+1)$$

并且 y 是偶数,则 x 和 z 都是偶数,并且

$$x<y<z$$

或者

$$z<y<x$$

这是因为第一部分是显然的,对于第二部分若 $x<y$,则

$$z+1=\frac{y^2+1}{x+1}\geqslant\frac{y^2+1}{y}>y$$

对于另一种情形同样成立.

回到原题,若 a_3 是奇数,则

$$(a_2+1)(a_4+1)=a_3^2+1\equiv 2(\bmod 4)$$

这意味着 a_2 和 a_4 中的一个数是偶数,这与事实(1)相矛盾.从而 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 都是偶数.并且

$$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$$

或者

$$a_1>a_2>a_3>a_4>a_5$$

但是由 a_1 的最小性,我们知道必须是第一种情况.

接下来考虑恒等式

$$\begin{aligned}(a_3+1)(a_1+a_3)=a_3^2-1+(a_1+1)(a_3+1)=\\ a_2^2+a_3^2=a_2^2-1+(a_2+1)(a_4+1)=\\ (a_2+1)(a_2+a_4)\end{aligned}$$

而 a_2+1 和 a_3+1 的公因数必须整除

$$(a_2+1)(a_4+1)-(a_3+1)(a_3-1)=2$$

结合这两个数是奇数,知它们互素.从而我们知道 a_1+a_3 是 a_2+1,即存在某正整数 k,使得

$$a_1+a_3=k(a_2+1)$$

令

$$a_0=k(a_1+1)-a_2$$

因此我们有

$$(a_0+1)(a_2+1)=k(a_1+1)(a_2+1)-(a_2-1)(a_2+1)=$$
$$(a_1+1)(a_1+a_3)-(a_1+1)(a_3+1)+2=$$
$$(a_1+1)(a_1-1)+2=a_1^2+1$$

因此 $a_0\geqslant 0$. 若 $a_1>0$,由事实(1) 得到

$$a_0<a_1<a_2$$

从而(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4) 也是满足条件的数列,这与 a_1 的最小性矛盾.

从而 $a_0=0$,这意味着

$$a_2=a_1^2$$

但是

$$a_2=k(a_1+1)$$

这将会产生矛盾,因为 $a_1+1>1$ 不可能被与之互素的 a_1^2 整除.

从而当 $n\geqslant 5$ 时,是不可能的.

注 1　事实上找到一个 $n=4$ 的例子并不是那么容易,而是需要大量的计算的,但我们可以简化些情形. 如解答过程中,等式

$$(a_1+1)(a_3+1)=a_2^2+1$$

和

$$(a_2+1)(a_4+1)=a_3^2+1$$

告诉我们,a_1,a_4 是偶数,但是 a_2,a_3 是奇数. 当 $a_1=2$ 时,我们得到

$$a_2\equiv -1 \pmod 3$$

这是不可能的. 于是我们尝试 $a_1=4$ 的情况. 在此时

$$a_2^2\equiv -1 \pmod 5$$

且 a_2 是奇数,从而

$$a_2\equiv 3 \pmod 5$$

因此我们从

$$a_2=7,13,17,23,27,33$$

开始验证且发现最后一种情况是可行的.

注 2　在解答 2 中,由于

$$a_1=k(a_2+1)-a_3$$

和

$$a_2=k(a_3+1)-a_4$$

因此

$$a_0=k(a_1+1)-a_2$$

的选取是自然的.

5 记 $P(x)$ 是一个非常数的整系数多项式. 证明不存在从整数集到整数集的函数使得,对任意 $n \geqslant 1$,满足 $T^n(x)=x$ 的整数解的个数恰好等于 $P(n)$,其中 T^n 是函数 T 的 n 次迭代.

解法 1 假设存在次数大于等于 1 的多项式 $P(x)$ 和函数 T 满足要求. 记

$$A(n)=\{x \in \mathbf{Z} \mid T^n(x)=x\}$$

且

$$B(n)=\{x \in \mathbf{Z} \mid T^n(x)=x,$$
$$T^k(x) \neq x, \forall 1 \leqslant k<n\}$$

由假设 $A(n)$ 和 $B(n)$ 都是有限集,且对任意 $x \in A(n)$,存在一个最小的 $k \geqslant 1$ 满足

$$T^k(x)=x$$

或者说 $x \in B(k)$. 记

$$d=\gcd(k, n)$$

则存在正整数 r, s 使得

$$rk-sn=d$$

从而

$$x=T^{rk}(x)=T^{sn+d}(x)=T^d(T^{sn}(x))=T^d(x)$$

由 k 的最小性知 $d=k$,从而 $k \mid n$. 另一面,若 $k \mid n$,显然有

$$B(k) \subset A(n)$$

因此我们有无交并

$$A(n)=\bigcup_{d \mid n} B(d)$$

且

$$|A(n)|=\sum_{d \mid n}|B(d)|$$

进一步地,对任意 $x \in B(N)$,那么

$$x, T(x), T^2(x), \cdots, T^{n-1}(x)$$

是互不相同的 n 个元素且都属于 $B(n)$. 这是因为首先显然有,它们属于 $A(n)$. 若对某个正整数 $k<n$ 和对 $0 \leqslant i \leqslant n$ 有

$$T^k(T^i(x))=T^i(x)$$

即

$$T^{k+i}(x)=T^i(x)$$

那么意味着

$$x=T^n(x)=T^{n-i}(T^i(x))=$$
$$T^{n-i}(T^{k+i}(x))=$$
$$T^k(T^n(x))=T^k(x)$$

这与 $x \in B(n)$ 相矛盾. 因此

$$T^i(x) \in B(n), T^i(x) \neq T^j(x), 0 \leqslant i < j \leqslant n-1$$

所以,事实上,在 T 的作用下,$B(n)$ 是一些轨道的无交并,且每个轨道的元素个数为 n,从而

$$n \mid |B(n)|$$

现在设

$$P(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i, a_i \in \mathbf{Z}, k \geqslant 1, a_k \neq 0$$

且由假设

$$|A(n)| = P(n), \forall n \geqslant 1$$

记 p 是任意一个素数,则

$$p^2 \mid |B(p^2)| = |A(p^2)| - |A(p)| = a_1(p^2 - p) + a_2(p^4 - p^2) + \cdots$$

从而 $p \mid a_1$ 且由于对任意素数 p 都要成立,从而 $a_1 = 0$.

现在我们考虑两个不同的素数 p 和 q,有

$$p^2 q \mid |B(p^2 q)| = |A(p^2 q)| - |A(pq)| - |B(p^2)|$$

这意味着

$$p^2 q \mid |B(p^2)| = |A(p^2)| - |A(p)| = a_2(p^4 - p^2) + a_3(p^6 - p^3) + \cdots + a_k(p^{2k} - p^k)$$

因为上式对任意素数 q 都成立,我们有

$$a_2(p^4 - p^2) + a_3(p^6 - p^3) + \cdots + a_k(p^{2k} - p^k) = 0$$

对任意素数 p. 而这是一个关于 p 的 $2k$ 次多项式($a_k \neq 0$),最多只有 $2k$ 个根,从而矛盾.

注 最后的矛盾还可以这样得到

$$a_k = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{p^{2k}} (a_2(p^4 - p^2) + a_3(p^6 - p^3) + \cdots + a_k(p^{2k} - p^k)) = 0$$

解法 2 继续适用解答 1 中的 $A(n)$ 和 $B(n)$ 的定义且假设 $P(x)$ 是满足要求的多项式. 这样我们可以与解答 1 一样,得到对任意整数 n,有

$$P(n) = |A(n)| = \sum_{d \mid n} |B(d)|$$

且

$$n \mid |B(n)|$$

因此对任意不同的素数 p 和 q,我们有

$$P(0) \equiv P(pq) \equiv |B(1)| + |B(p)| + |B(q)| + |B(pq)| \equiv$$

$$|B(1)|+|B(p)| \bmod q$$

从而,对于任意固定的 p,有

$$P(0)-|B(1)|-|B(p)|$$

能被任意大的素数整除.从而

$$P(0)=|B(1)|+|B(p)|=P(p)$$

对任意素数 p 都成立.这意味着多项式 $P(x)$ 是常数多项式,矛盾.

6 记 k 是一个正整数,证明:若存在一个整数数列 a_0,a_1,…,满足条件 $a_n=\frac{a_{n-1}+n^k}{n}$,$\forall n\geqslant 1$,则 $k-2$ 能被 3 整除.

解法1 部分 A.对任意正整数 k,存在一个 $k-1$ 次多项式整系数 P_k,即

$$P_k\in \mathbf{Z}[x]$$

且整数 q_k 满足以下恒等式

$$xP_k(x)=x^k+P_k(x-1)+q_k \quad (I_k)$$

为证明这个,对任意给定的 k,设

$$P_k(x)=b_{k-1}x^{k-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

然后再依次确定系数 $b_{k-1},b_{k-2},\cdots,b_0$ 和 q_k 的值.首先我们可以取 $b_{k-1}=1$.对任意 $m=k-1,k=2,\cdots,1$,比较等式(I_k)两边 x^m 的系数,可知 b_{m-1} 是 $b_{k-1},\cdots,b_m$ 的整系数的线性组合,最后令

$$q_k=-P_k(-1)$$

部分 B.记 k 是一个正整数,且记 $a_0,a_1,\cdots$ 是满足题目中递推关系的数列.那么递推关系可以写成

$$a_n-P_k(n)=\frac{a_{n-1}-P_k(n-1)}{n}-\frac{q_k}{n},\forall n\geqslant 1$$

用归纳法容易证明

$$a_n-P_k(n)=\frac{a_0-P_k(0)}{n}-q_k\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i!}{n!},\forall n\geqslant 1$$

因此对任意 $n\geqslant 1$,a_n 都是整数等价于

$$a_0=0,q_k=0$$

部分 C.令恒等式(I_k)乘以 x^2+x 再减去恒等式(I_{k+1}),(I_{k+2})和 $q_kx^2=q_kx^2$,我们可以得到

$$xT_k(x)=T_k(x-1)+2x(P_k(x-1)+q_k)-(q_{k+2}+q_{k+1}+q_k)$$

其中

$$T_k(x)\in \mathbf{Z}[x]$$

且

$$T_k(x)=x(x+1)P_k(x)-P_{k+1}(x)-P_{k+2}(x)-q_kx$$

因此

$$xT_k(x)\equiv T_k(x-1)+q_{k+2}+q_{k+1}+q_k(\text{mod}2),k=1,2,\cdots$$

比较上式两边的次数,我们可以得到

$$T_k(x)\equiv 0(\text{mod } 2)$$

且

$$q_{k+2}\equiv q_{k+1}+q_k,k=1,2,\cdots$$

而由 $q_1=0$ 和 $q_2=0$,这就完成了证明.

解法 2　部分 A 和 B. 记 k 是一个正整数,且设存在整数数列 $a_0,a_1,\cdots$ 满足题目中的递归条件. 我们证明存在多项式 $P\in\mathbf{Z}[x]$,即整系数多项式,满足

$$a_n=P(n),n=0,1,\cdots$$

且

$$xP(x)=x^k+P(x-1)$$

为证明上面的叙述,我们设

$$P(x)=b_{k-1}x^{k-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

然后再依次定义系数 $b_{k-1},b_{k-2},\cdots,b_0$ 满足

$$xP(x)-x^k-P(x-1)=q$$

其中 $q=q_k$ 是一个整数. 比较两边 x^m 的系数,可知 b_{m-1} 是 $b_{k-1},\cdots,b_m$ 的整系数的线性组合.

记

$$c_n=a_n-P(n)$$

我们得到

$$P(n)+c_n=\frac{P(n-1)+c_{n-1}+n^k}{n}$$

即

$$q+nc_n=c_{n-1}$$

从而

$$c_n=\frac{c_0}{n!}-q\cdot\frac{0!\ +1!\ +(n-1)!}{n!}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}c_n=0$$

由于 $c_n\in\mathbf{Z}$,这就意味着对足够大的 n,$c_n=0$. 从而

$$q=0,c_n=0,n=0,1,\cdots$$

部分 C. 由于

$$q=q_k=0$$

则

$$xP(x)=x^k+P(x-1)$$

我们考虑这个恒等式在对任意 $x\in \mathbf{F}_4$ 时成立

$$\mathbf{F}_4=\{0,1,\alpha,1+\alpha\}$$

则有

$$\alpha P(\alpha)=\alpha^k+P(\alpha)$$

且

$$(\alpha+1)P(\alpha+1)=(\alpha+1)^k+P(\alpha)$$

从而

$$P(\alpha)=1\cdot P(\alpha)=(\alpha+1)\alpha P(\alpha)=$$
$$(\alpha+1)P_k(\alpha+1)+(\alpha+1)\alpha^k=$$
$$P(\alpha)+(\alpha+1)^k+(\alpha+1)\alpha^k$$

因此便有

$$(\alpha+1)^{k-1}=\alpha^k$$

从而

$$k\equiv 2(\bmod 3)$$

注 1 对 $k=2$,那么整数数列

$$a_n=n+1,n=0,1,\cdots$$

满足条件.

注 2 事实上,解答中的多项式 $P_k(x)$ 是唯一的,前几项 $P_k(x)$ 和 q_k 如下

$$P_1(x)=1,q_1=-1$$
$$P_2(x)=x+1,q_2=0$$
$$P_3(x)=x^3+x-1,q_3=-1$$
$$P_4(x)=x^3+x^2-2x-1,q_4=-1$$
$$P_5(x)=x^4+x^3-3x^2+5,q_5=-2$$
$$P_6(x)=x^5+x^4-4x^3+2x^2+10x-5,q_6=9$$
$$q_7=-9,q_8=-50,q_9=267,q_{10}=-413,q_{11}=-2\ 180$$

注 3 整数 q_k 可以用第二类斯特林(Stirling)数表示出来.为证此,我们首先由第二类斯特林数的定义

$$x^k=S_{k-1,k-1}x(x-1)\cdots(x-k+1)+S_{k-1,k-2}x(x-1)\cdots(x-k+2)+\cdots+S_{k-1,0}x \quad ①$$

比如

$$S_{2,2}=1,S_{2,1}=3,S_{2,0}=1$$

且定义

$$\Omega_k=S_{k-1,k-1}-S_{k-1,k-2}+\cdots$$

在式 ① 中用 $-x$ 代替 x,我们得到

$$x^k=S_{k-1,k-1}x(x+1)\cdots(x+k-1)-$$

$$S_{k-1,k-2}x(x+1)\cdots(x+k-2)+\cdots\pm S_{k-1,0}x$$

记

$$P(x)=S_{k-1,k-1}(x+1)\cdots(x+k-1)+ (S_{k-1,k-1}-S_{k-1,k-2})(x+1)\cdots(x+k-2)+ (S_{k-1,k-1}-S_{k-1,k-2}+S_{k-1,k-3})(x+1)\cdots (x+k-3)+\cdots+\Omega_k$$

我们得到

$$xP(x)-P(x-1)=S_{k-1,k-1}x(x+1)\cdots(x+k-1)- S_{k-1,k-2}x(x+1)\cdots(x+k-2)+\cdots\pm S_{k-1,0}x-\Omega_k$$

因此

$$q_k=-\Omega_k$$

注 4(译者注) 本题第二种方法的部分 A 和 B 的实质跟第一种方法差不多，而第二种方法的部分 C 的作法需要一定的域论基础才能读懂.

7 记 a 和 b 是两个大于 1 的整数. 证明：存在一个正整数 n，使得 $(a^n-1)(b^n-1)$ 不是完全平方数.

解法 1 首先注意到

$$(1-\alpha)^{\frac{1}{2}}(1-\beta)^{\frac{1}{2}}=\left(1-\frac{1}{2}\cdot\alpha-\frac{1}{8}\cdot\alpha^2-\right)\cdot \left(1-\frac{1}{2}\cdot\beta-\frac{1}{8}\cdot\beta^2-\right)= \sum_{k,l\geqslant 0}c_{k,l}\alpha^k\beta^l,\ \forall\,\alpha,\beta\in(0,1) \quad ①$$

其中 $c_{0,0}=1$ 且 $c_{k,l}$ 是某些确定的数.

若对任意正整数 n，$(a^n-1)(b^n-1)$ 都是完全平方数，且设

$$x_n=\sqrt{(a^n-1)(b^n-1)}\in\mathbf{Z}$$

因为我们可以用 a^2 代替 a 和 b^2 代替 b，从而，我们可以假设 a 和 b 都是完全平方数，从而 $\sqrt{ab}$ 是整数.

首先，假设对任意正整数 μ,v，有 $a^\mu\neq b^v$ 的情形. 我们有

$$x_n=(\sqrt{ab})^n\left(1-\frac{1}{a^n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{b^n}\right)^{\frac{1}{2}}=\sum_{k,l\geqslant 0}c_{k,l}\left(\frac{\sqrt{ab}}{a^kb^l}\right) \quad ②$$

取 k_0 和 l_0 满足

$$a^{k_0}>\sqrt{ab},b^{l_0}>\sqrt{ab}$$

我们定义多项式

$$P(x)=\prod_{k=0,l=0}^{k_0-1,l_0-1}(a^kb^lx-\sqrt{ab})=\sum_{i=0}^{k_0\cdot l_0}d_ix_i$$

其中 d_i 都是整系数. 由假设,P 的零点

$$\frac{\sqrt{ab}}{a^kb^l},k=0,\cdots,k_0-1;l=0,\cdots,l_0-1$$

互不相同.

进一步地,我们考虑数列

$$y_n=\sum_{i=0}^{k_0\cdot l_0}d_ix_{n+i},n=1,2,\cdots \quad ③$$

由线性递归理论,我们得到

$$y_n=\sum_{\substack{k,l\geqslant 0\\ k\geqslant k_0\text{或}l\geqslant l_0}}e_{k,l}\left(\frac{\sqrt{ab}}{a^kb^l}\right)^n,n=1,2,\cdots \quad ④$$

其中 $e_{k,l}$ 是实数,因此我们有

$$|y_n|\leqslant\sum_{\substack{k,l\geqslant 0\\ k\geqslant k_0\text{或}l\geqslant l_0}}|e_{k,l}|\left(\frac{\sqrt{ab}}{a^kb^l}\right)^n=M_n$$

由于式 ④ 中的级数是由有限个式 ① 中的绝对收敛级数的线性组合,因此我们得到

$$M_1<\infty$$

因为

$$\frac{\sqrt{ab}}{a^kb^l}\leqslant\lambda=\max\left\{\frac{\sqrt{ab}}{a^{k_0}},\frac{\sqrt{ab}}{b^{l_0}}\right\},\forall k,l\geqslant 0$$

满足

$$k\geqslant k_0\text{ 或 }l\geqslant l_0$$

我们得到估计

$$M_{n+1}\leqslant\lambda M_n,n=1,2,\cdots$$

又由于 $\lambda<1$,从而当 $n\to\infty$ 时有,$M_n\to 0$ 且 $y_n\to 0$. 因此对足够大的 n,有 $y_n=0$.

因此,等式 ③ 意味着

$$\sum_{i=0}^{k_0\cdot l_0}d_ix_{n+i}=0$$

再由线性递归理论得到,对足够大的 n,有

$$x_n=\sum_{k=0,l=0}^{k_0-1,l_0-1}f_{k,l}\left(\frac{\sqrt{ab}}{a^kb^l}\right)^n$$

其中 $f_{k,l}$ 为某些实数.

与式 ② 比较,且对任意正整数 μ,v,有 $a^\mu\neq b^v$. 当 $k,l\geqslant 0$ 且 $k<k_0,l<l_0$ 时,我们得到

$$f_{k,l}=c_{k,l}$$

当 $k\geqslant k_0$ 或 $l\geqslant l_0$ 时

$$c_{k,l}=0$$

再由等式 ①,也就是

$$(1-\alpha)^{\frac{1}{2}}(1-\beta)^{\frac{1}{2}}=\sum_{k=0,l=0}^{k_0-1,l_0-1}c_{k,l}\cdot\alpha^k\beta^l,\forall\alpha,\beta\in(0,1)\qquad ⑤$$

选取 $k^*<k_0$ 为最大整数满足存在 i 使得 $c_{k^*,i}\neq 0$. 对式 ⑤ 两边平方且比较 $\alpha^{2k^*}\beta^{2i^*}$,其中 i^* 是满足 $c_{k^*,i^*}\neq 0$ 的最小的整数,我们得到 $k^*=0$,这意味着式 ⑤ 的右边与 α 无关,这显然不对.

现在我们只剩下 $a^\mu=b^v$(μ,v 为某两个正整数)的情况需要证明. 我们可以假设 μ 和 v 是互素的. 因此存在正整数 c,使得

$$a=c^v\text{ 且 }b=c^\mu$$

现在由展开式 ②,即

$$x_n=\sum_{j\geqslant 1}g_j\left(\frac{\sqrt{c^{\mu+v}}}{c^j}\right)^n$$

对某些系数 g_j,并且重复以上讨论,我们有,存在 j_0,使得当 $j>j_0$ 时,有 $g_j=0$. 但是这意味着

$$(1-x^\mu)^{\frac{1}{2}}(1-x^v)^{\frac{1}{2}}=\sum_{j=0}^{j_0}g_jx^j$$

对任意 $x\in(0,1)$,两边平方,我们得到

$$(1-x^\mu)(1-x^v)$$

是一个多项式的平方. 特别地,它的根都至少是 2 重根,而考虑其单位根就得到

$$\mu=v$$

从而

$$\mu=v=1$$

即 $a=b$,矛盾.

解法 2 我们记

$$a^2=A,b^2=B$$

且

$$z_n=\sqrt{(A^n-1)(B^n-1)}$$

若对 $n=1,2,\cdots,z_n$ 都是整数. 不失一般性,不妨设 $b<a$. 确定一正整数 k 满足

$$b^{k-1}\leqslant a<b^k$$

且定义有理数数列 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots$ 满足

$$2\gamma_1=2$$

且

$$2\gamma_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\gamma_{n-i},n=1,2,\cdots$$

(容易用范德蒙的卷积公式知

$$\gamma_n=\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot 2n}$$

但对于本题不需要知道这个事实).

由兰道(Landau) 的 O—— 符号,我们得到

$$\left\{(ab)^n-\gamma_1\left(\frac{a}{b}\right)^n-\gamma_2\left(\frac{a}{b^3}\right)^n-\cdots-\gamma_k\left(\frac{a}{b^{2k-1}}\right)^n+O\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\}=$$

$$A^nB^n-2\gamma_1A^n-\sum_{i=2}^{k}(2\gamma_i-\sum_{i=1}^{i-1}\gamma_i\gamma_{i-j})\left(\frac{A}{B^{i-1}}\right)^n+O\left(\frac{A}{B^k}\right)^n+$$

$$O(B^n)=A^nB^n-A^n+O(B^n)$$

则

$$z_n=(ab)^n-\gamma_1\left(\frac{a}{b}\right)^n-\gamma_2\left(\frac{a}{b^3}\right)^n-\cdots-\gamma_k\left(\frac{a}{b^{2k-1}}\right)^n+O\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

选择适当的有理数 $r_1,r_2,\cdots,r_{k+1}$,满足

$$(x-ab)\cdot\left(x-\frac{a}{b}\right)\cdot\cdots\cdot\left(x-\frac{a}{b^{2k-1}}\right)=x^{k+1}-r_1x^k\pm\cdots\pm r_{k+1}$$

则存在一个自然数 M,使得 $Mr_1,Mr_2,\cdots,Mr_{k+1}$ 都是整数,且有

$$M(z_{n+k+1}-r_1z_{n+k}\pm\cdots\pm r_{k+1}z_n)=O\left(\frac{b}{a}\right)^n,\forall n\in\mathbf{N}$$

从而存在自然数 N,使得当 $n\geqslant N$ 时,有

$$z_{n+k+1}=r_1z_{n+k}-r_2z_{n+k-1}\pm\cdots\mp r_{k+1}z_n$$

则由线性递归数列的理论知,存在有理数 $\delta_0,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k$,满足对足够大的 n,都有

$$z_n=\delta_0(ab)^n-\delta_1\left(\frac{a}{b}\right)^n-\delta_2\left(\frac{a}{b^3}\right)^n-\cdots-\delta_k\left(\frac{a}{b^{2k-1}}\right)^n$$

其中 $\delta>0$(由于 $z_n>0$). 得到

$$A^nB^n-A^n-B^n+1=z_n^2=$$

$$\left\{\delta_0(ab)^n-\delta_1\left(\frac{a}{b}\right)^n-\delta_2\left(\frac{a}{b^3}\right)^n-\cdots-\delta_k\left(\frac{a}{b^{2k-1}}\right)^n\right\}^2=$$

$$\delta_0^2A^nB^n-2\delta\delta_1A^n-\sum_{i=2}^{k}(2\delta_i-\sum_{j=1}^{i-1}\delta_i\delta_{i-j})\left(\frac{A}{B^{i-1}}\right)^n+O\left(\frac{A}{B^k}\right)^n$$

用简单的渐近可以得到

$$\delta_0=0,\delta_1=\frac{1}{2},\delta_i=\frac{1}{2}\sum_{j=1}j=i-1\delta_j\delta_{i-j},i=2,3,\cdots,k-2$$

且

$$a=b^{k-1}$$

这得出,若 $k>2$,则存在 $P\in\mathbf{Q}[X]$,使得

$$(X-1)(X^{-1}-1)=P(X)^2$$

但这不可能发生,因为 X^{k-1} 存在单重根. 因此我们的假设对于任意 $n=1,2,\cdots,z_n$ 都是整数是不对的,从而证明了本题.

相关链接——一道第 50 届 IMO 试题的探究①

2009 年第 50 届 IMO 的第 6 题是一个组合问题:

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相同的正整数,M 是有 $n-1$ 个元素的正整数集,且不含数

$$s=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

一只蚱蜢沿着实数轴从原点 O 开始向右跳跃 n 步,它的跳跃距离是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的某个排列. 证明:可以选择一种排列,使得蚱蜢跳跃落下的点所表示的数都不在集 M 中.

本题满分 7 分,全部 565 位参赛选手平均得分 0.168,远远低于其他 5 题的平均得分(全部参赛选手 1~5 题的平均得分分别为 4.804,3.710,1.019,2.915,2.474),其中 3 人得满分,占 0.53%;540 人得 0 分,占 95.58%. 我国 6 位参赛选手本题得分分别为 7,3,1,0,0,0,而其他 5 题我国每位参赛选手每题均得到满分 7 分.

组合问题具有形式多样、解法灵活的特点. 有的组合问题难度很大,也非常引人入胜. 笔者经过分析发现,此题的关键在于对任意的 n 个互不相同的正数,是否存在一种排列作为蚱蜢 n 步跳跃的距离,使得蚱蜢前 $n-1$ 次跳跃落下的点所表示的数,都不同于事先给定的另外 $n-1$ 个正数. 本文得到该试题的推广和加强形式,并给出非常简捷的证明.

定理 1 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是任意给定的互不相同的正数,M 是有 $n-1$ 个元素的正数集. 一只蚱蜢沿着实数轴从原点 O 开始向右跳跃 n 步,它的跳跃距离是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的某个排列. 则可以选择一种排列,使得蚱蜢跳跃落下的前 $n-1$ 个点所表示的数都不在集 M 中.

证明 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时,定理显然成立.

当 $n=2$ 时,对任意给定的 2 个不相同的正数 a_1,a_2,因为 M 中只有 1 个元素,故 a_1,a_2 至少 1 个不在 M 中. 选择 a_1,a_2 不在 M 中的一个数作为蚱蜢跳跃第 1 步的距离,则蚱蜢跳跃落下的第 1 个点所表示的数(即蚱蜢跳跃第 1 步的距离)不在集 M 中. 定理成立.

---

① 边欣,天津师范大学.

假设当 $n=k-1,k$ 时定理成立，即对含有 $k-2$ 个($k-1$ 个)元素的正数集 M，存在任意给定的 $k-1$ 个(k 个)互不相同的正数的一种排列作为蚱蜢 $k-1$ 步(k 步)跳跃的距离，使得蚱蜢跳跃落下的前 $k-2$ 个点($k-1$ 个点)所表示的数都不在集 M 中. 下面证明当 $n=k+1$ 时定理也成立，即要证明对含有 k 个元素的正数集 M，存在任意给定的 $k+1$ 个互不相同的正数 $a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}$ 的一种排列作为蚱蜢 $k+1$ 步跳跃的距离，使得蚱蜢跳跃落下的前 k 个点所表示的数都不在集 M 中.

不妨设

$$a_1<a_2<\cdots<a_{k+1}$$

并记

$$s=a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}$$
$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}\}$$

m 为 M 中的最大数

$$A'=\frac{A}{\{a_{k+1}\}},M'=\frac{M}{\{m\}}$$

下面分 3 种情形讨论：

(1) 当 $s-a_{k+1}\notin M$ 时. 因为 M' 含有 $k-1$ 个元素，根据归纳假设，对 A' 中 k 个互不相同的正数，可以选择一种排列(记为 P)作为蚱蜢前 k 步跳跃的距离，使得蚱蜢跳跃落下的前 $k-1$ 个点所表示的数都不在集 M' 中.

由于 $s-a_{k+1}\notin M$，若这 $k-1$ 个点所表示的数都不同于 m，则已经找到一种排列 P 作为蚱蜢前 k 步跳跃的距离，使得蚱蜢跳跃落下的前 k 个点所表示的数都不在集 M 中.

反之，若蚱蜢跳跃落下的前 $k-1$ 个点所表示的数中有一个数等于 m，不妨设第 j 个点所表示的数等于 m，$j\leqslant k-1$. 将排列 P 中的第 j 个数替换为 a_{k+1}，得到一个新排列(记为 P'). 选择排列 P' 作为蚱蜢前 k 步跳跃的距离，则蚱蜢跳跃落下的第 1 个点至第 $j-1$ 个点所表示的数不变，第 j 个点至第 k 个点所表示的数均大于 m. 故这 k 个点所表示的数都不在集 M 中.

(2) 当 $s-a_{k+1}=m$ 时. 根据归纳假设，对 A' 中 k 个互不相同的正数，可以选择一种排列(记为 Q)作为蚱蜢前 k 步跳跃的距离，使得蚱蜢跳跃落下的前 $k-1$ 个点所表示的数都不在集 M' 中. 注意到这 $k-1$ 个数均小于

$$s-a_{k+1}=m$$

因此蚱蜢跳跃落下的前 $k-1$ 个点所表示的数都不在集 M 中.

将排列 Q 中的第 k 个数替换为 a_{k+1}，得到一个新排列(记为 Q'). 选择排列 Q' 作为蚱蜢前 k 步跳跃的距离，则蚱蜢跳跃落下的第 1 个点至第 $k-1$ 个点所表示的数不变，第 k 个点所表示的数大

于 m. 故这 k 个点所表示的数都不在集 M 中.

(3) 当 $s-a_{k+1}\in M$ 且 $s-a_{k+1}\neq m$ 时. 因为 $s-a_1,s-a_2,\cdots,s-a_{k+1}$ 共 $k+1$ 个数互不相同, M 含有 k 个元素, 故存在 $a_i\in A$, 使得

$$s-a_i\notin M$$

不妨设 a_i 为 A 中满足 $s-a_i\notin M$ 的最大数, 则

$$s-a_{k+1}\in M,\cdots,s-a_{i+1}\in M$$

记

$$A_i=\frac{A}{\{a_i\}}$$

因为 M' 含有 $k-1$ 个元素, 根据归纳假设, 对 A_i 中 k 个互不相同的正数, 可以选择一种排列(记为 P_i) 作为蚱蜢前 k 步跳跃的距离, 使得蚱蜢跳跃落下的前 $k-1$ 个点所表示的数都不在集 M' 中.

由于 $s-a_i\notin M$, 若这 $k-1$ 个点所表示的数都不同于 m, 则已经找到一种排列 P_i 作为蚱蜢前 k 步跳跃的距离, 使得蚱蜢跳跃落下的前 k 个点表示的数都不在集 M 中.

反之, 若蚱蜢跳跃落下的前 $k-1$ 个点所表示的数中有一个数等于 m, 注意到蚱蜢跳跃落下的前 $k-1$ 个点所表示的数均小于 $s-a_i$, 故

$$s-a_i>m$$

从而对任意的 $r=1,\cdots,i$, 均有

$$s-a_r\notin M$$

记

$$A'_r=\frac{A}{\{a_r,a_{k+1}\}},M''=\frac{M}{\{m,s-a_{k+1}\}}$$

因为 M'' 含有 $k-2$ 个元素, 根据归纳假设, 对 A'_r 中 $k-1$ 个互不相同的正数, 可以选择一种排列(记为 Q_r) 作为蚱蜢前 $k-1$ 步跳跃的距离, 使得蚱蜢跳跃落下的前 $k-2$ 个点所表示的数都不在集 M'' 中. 注意到这 $k-2$ 个点所表示的数均小于 $s-a_r-a_{k+1}$, 从而它们均不等于 $s-a_{k+1}$ 和 m, 因此蚱蜢跳跃落下的前 $k-2$ 个点所表示的数都不在集 M 中. 进一步分 2 种情形讨论:

(i) 若存在 $r=1,\cdots,i$, 使得

$$s-a_r-a_{k+1}\notin M$$

选择 A 中的一个排列, 它的前 $k-1$ 项为排列 Q_r, 第 k 项为 a_{k+1}, 第 $k+1$ 项为 a_r, 则蚱蜢跳跃落下的第 $k-1$ 个点所表示的数为

$$s-a_r-a_{k+1}\notin M$$

第 k 个点所表示的数为

$$s-a_r\notin M$$

故蚱蜢跳跃落下的前 k 个点所表示的数都不在集 M 中.

(ii) 若对所有的 $r=1,\cdots,i$,均有

$$s-a_r-a_{k+1}\in M$$

注意到

$$s-a_i-a_{k+1}<\cdots<s-a_1-a_{k+1}<s-a_{k+1}<\cdots<s-a_{k+1}$$

这 $k+1$ 个互不相同的正数均在集 M 中,这与集 M 中含有 k 个元素矛盾.

综上所述,定理成立.证毕.

根据定理 1 立即可得:

定理 2　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是任意给定的互不相同的正数,M 是有 $n-1$ 个元素的正数集,且不含数

$$s=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

一只蚱蜢沿着实数轴从原点 O 开始向右跳跃 n 步,它的跳跃距离是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的某个排列.则可以选择一种排列,使得蚱蜢跳跃落下的 n 个点所表示的数都不在集 M 中.

上述两个定理中均不包括原试题对各个正数的"整数"条件约束,因此本文定理是对原试题的推广和加强.

附　录
IMO 背景介绍

第1章 引 言

第1节 国际数学奥林匹克

国际数学奥林匹克(IMO)是高中学生最重要和最有威望的数学竞赛.它在全面提高高中学生的数学兴趣和发现他们之中的数学尖子方面起着重要作用.

在开始时,IMO是(范围和规模)要比今天小得多的竞赛.在1959年,只有7个国家参加第一届IMO,它们是:保加利亚,捷克斯洛伐克,民主德国,匈牙利,波兰,罗马尼亚和苏联.从此之后,这一竞赛就每年举行一次.渐渐的,东方国家,西欧国家,直至各大洲的世界各地许多国家都加入进来(唯一的一次未能举办竞赛的年份是1980年,那一年由于财政原因,没有一个国家有意主持这一竞赛.今天这已不算一个问题,而且主办国要提前好几年排队).到第45届在雅典举办IMO时,已有不少于85个国家参加.

竞赛的形式很快就稳定下来并且以后就不变了.每个国家可派出6个参赛队员,每个队员都单独参赛(即没有任何队友协助或合作).每个国家也派出一位领队,他参加试题筛选并和其队员隔离直到竞赛结束,而副领队则负责照看队员.

IMO的竞赛共持续两天.每天学生们用四个半小时解题,两天总共要做6道题.通常每天的第一道题是最容易的而最后一道题是最难的,虽然有许多著名的例外(IMO1996—5是奥林匹克竞赛题中最难的问题之一,在700个学生中,仅有6人做出来了这道题!).每题7分,最高分是42分.

每个参赛者的每道题的得分是激烈争论的结果,并且,最终,判卷人所达成的协议由主办国签名,而各国的领队和副领队则捍卫本国队员的得分公平和利益不受损失.这一评分体系保证得出的成绩是相对客观的,分数的误差极少超过2或3点.

各国自然地比较彼此的比分,只设个人奖,即奖牌和荣誉奖,在IMO中仅有少于$\frac{1}{12}$的参赛者被授予金牌,少于$\frac{1}{4}$的参赛者被授予金牌或银牌以及少于$\frac{1}{2}$的参赛者被授予金牌,银牌或者铜牌.在没被授予奖牌的学生之中,对至少有一个问题得满分的那些人授予荣誉奖.这一确定得奖的系统运行的相当完好.一方面它保证有严格的标准并且对参赛者分出适当的层次使得每个参赛者有某种可以尽力争取的目标.另一方面,它也保证竞赛有不依赖于竞赛题的难易差别的很大程度的宽容度.

根据统计,最难的奥林匹克竞赛是1971年,然后依次是1996年,1993年和1999年.得分最低的是1977年,然后依次是1960年和1999年.

竞赛题的筛选分几步进行.首先参赛国向IMO的主办国提交他们提出的供选择用的候选题,这些问题必须是以前未使用过的,且不是众所周知的新鲜问题.主办国不提出备选问题.命题委员会从所收到的问题(称为长问题单,即第一轮预选题)中选出一些问题(称为短

问题单)提交由各国领队组成的 IMO 裁判团,裁判团再从第二轮预选题中选出 6 道题作为 IMO 的竞赛题.

除了数学竞赛外,IMO 也是一次非常大型的社交活动. 在竞赛之后,学生们有三天时间享受主办国组织的游览活动以及与世界各地的 IMO 参加者们互动和交往. 所有这些都确实是令人难忘的体验.

第 2 节 IMO 竞赛

已出版了很多 IMO 竞赛题的书[65]. 然而除此之外的第一轮预选题和第二轮预选题尚未被系统加以收集整理和出版,因此这一领域中的专家们对其中很多问题尚不知道. 在参考文献中可以找到部分预选题,不过收集的通常是单独某年的预选题. 参考文献[1],[30],[41],[60]包括了一些多年的问题. 大体上,这些书包括了本书的大约 50%的问题.

本书的目的是把我们全面收集的 IMO 预选题收在一本书中. 它由所有的预选题组成,包括从第 10 届以及第 12 届到第 44 届的第二轮预选题和第 19 届竞赛中的第一轮预选题. 我们没有第 9 届和第 11 届的第二轮预选题,并且我们也未能发现那两届 IMO 竞赛题是否是从第一轮预选题选出的或是否存在未被保存的第二轮预选题. 由于 IMO 的组织者通常不向参赛国的代表提供第一轮预选题,因此我们收集的题目是不全的. 在 1989 年题目的末尾收集了许多分散的第一轮预选题,以后有效的第一轮预选题的收集活动就结束了. 前八届的问题选取自参考文献[60].

本书的结构如下:如果可能的话,在每一年的问题中,和第一轮预选题或第二轮预选题一起,都单独列出了 IMO 竞赛题. 对所有的第二轮预选题都给出了解答. IMO 竞赛题的解答被包括在第二轮预选题的解答中. 除了在南斯拉夫举行的两届 IMO(由于爱国原因)之外,对第一轮预选题未给出解答,由于那将使得本书的篇幅不合理的加长. 由所收集的问题所决定,本书对奥林匹克训练营的教授和辅导教练是有益的和适用的. 通过在题号上附加 LL,SL,IMO 我们指出了题目的年号,是属于第一轮预选题,第二轮预选题还是竞赛题,例如(SL89—15)表示这道题是 1989 年第二轮预选题的第 15 题.

我们也给出了一个在我们的证明中没有明显地引用和导出的所有公式和定理一个概略的列表. 由于我们主要关注仅用于本书证明中的定理,我们相信这个列表中所收入的都是解决 IMO 问题时最有用的定理.

在一本书中收集如此之多的问题需要大量的编辑工作,我们对原来叙述不够确切和清楚的问题作了重新叙述,对原来不是用英语表达的问题做了翻译. 某些解答是来自作者和其他资源,而另一些解是本书作者所做.

许多非原始的解答显然在收入本书之前已被编辑. 我们不能保证本书的问题完全地对应于实际的第一轮预选题或第二轮预选题的名单. 然而我们相信本书的编辑已尽可能接近于原来的名单.

第2章 基本概念和事实

下面是本书中经常用到的概念和定理的一个列表.我们推荐读者在(也许)进一步阅读其他文献前首先阅读这一列表并熟悉它们.

第1节 代 数

2.1.1 多项式

定理 2.1 二次方程 $ax^2+bx+c=0(a,b,c\in\mathbf{R},a\neq 0)$ 有解

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$$

二次方程的判别式 D 定义为 $D^2=b^2-4ac$,当 $D<0$ 时,解是复数,并且是共轭的,当 $D=0$ 时,解退化成一个实数解,当 $D>0$ 时,方程有两个不同的实数解.

定义 2.2 二项式系数 $\binom{n}{k}$,$n,k\in\mathbf{N}_0,k\leqslant n$ 定义为

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{i!\ (n-i)!}$$

对 $i>0$,它们满足

$$\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}=\binom{n+1}{i}$$

以及

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

$$\binom{n+m}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

定理 2.3 (牛顿(Newton)二项式公式)对 $x,y\in\mathbf{C}$ 和 $n\in\mathbf{N}$,有

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$$

定理 2.4 (贝祖(Bezout)定理)多项式 $P(x)$ 可被二项式 $x-a(a\in\mathbf{C})$ 整除的充分必要条件是 $P(a)=0$.

定理 2.5 (有理根定理)如果 $x=\dfrac{p}{q}$ 是整系数多项式 $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ 的根,且 $(p,q)=1$,则 $p\mid a_0,q\mid a_n$.

定理 2.6 (代数基本定理)每个非常数的复系数多项式有一个复根.

定理 2.7 （爱森斯坦(Eisenstein) 判据）设 $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个整系数多项式，如果存在一个素数 p 和一个整数 $k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，使得 $p\mid a_0,a_1,\cdots,a_k,p\mid a_{k+1}$ 以及 $p^2\nmid a_0$，那么存在 $P(x)$ 的不可约因子 $Q(x)$，其次数至少是 k. 特别，如果 $k=n-1$，则 $P(x)$ 是不可约的.

定义 2.8 $x_1,\cdots,x_n$ 的对称多项式是一个在 $x_1,\cdots,x_n$ 的任意排列下不变的多项式，初等对称多项式是 $\sigma_k(x_1,\cdots,x_k)=\sum x_{i_1,\cdots,i_n}$（分别对 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 $k-$ 元素子集 $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ 求和）.

定理 2.9 （对称多项式定理）每个 $x_1,\cdots,x_n$ 的对称多项式都可用初等对称多项式 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 表出.

定理 2.10 （韦达(Vieta) 公式）设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $c_1,\cdots,c_n$ 都是复数，使得

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)=x^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+c_n$$

那么对 $k=1,2,\cdots,n$

$$c_k=(-1)^k\sigma_k(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$$

定理 2.11 （牛顿对称多项式公式）设 $\sigma_k=\sigma_k(x_1,\cdots,x_k)$ 以及 $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$，其中 $x_1,\cdots,x_n$ 是复数，那么

$$k\sigma_k=s_1\sigma_{k-1}+s_2\sigma_{k-2}+\cdots+(-1)^ks_{k-1}\sigma_1+(-1)^ks_k$$

2.1.2 递推关系

定义 2.12 一个递推关系是指一个由序列 $x_n,n\in\mathbf{N}$ 的前面的元素的函数确定的如下的关系

$$x_n+a_1x_{n-1}+\cdots+a_kx_{n-k}=0\quad(n\geqslant k)$$

如果其中的系数 $a_1,\cdots,a_k$ 都是不依赖于 n 的常数，则上述关系称为 k 阶的线性齐次递推关系. 定义此关系的特征多项式为 $P(x)=x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k$.

定理 2.13 利用上述定义中的记号，设 $P(x)$ 的标准因子分解式为

$$P(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_r)^{k_r}$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是不同的复数，而 $k_1,\cdots,k_r$ 是正整数，那么这个递推关系的一般解由公式

$$x_n=p_1(n)\alpha_1^n+p_2(n)\alpha_2^n+\cdots+p_r(n)\alpha_r^n$$

给出，其中 p_i 是次数为 k_i 的多项式. 特别，如果 $P(x)$ 有 k 个不同的根，那么所有的 p_i 都是常数.

如果 $x_0,\cdots,x_{k-1}$ 已被设定，那么多项式的系数是唯一确定的.

2.1.3 不等式

定理 2.14 平方函数总是正的，即 $x^2\geqslant 0(\forall x\in\mathbf{R})$. 把 x 换成不同的表达式，可以得出以下的不等式.

定理 2.15 （伯努利(Bernoulli) 不等式）

1. 如果 $n\geqslant 1$ 是一个整数，$x>-1$ 是实数，那么 $(1+x)^n\geqslant 1+nx$；
2. 如果 $\alpha>1$ 或 $\alpha<0$，那么对 $x>-1$ 成立不等式：$(1+x)^\alpha\geqslant 1+\alpha x$；
3. 如果 $\alpha\in(0,1)$，那么对 $x>-1$ 成立不等式：$(1+x)^\alpha\leqslant 1+\alpha x$.

定理 2.16 （平均不等式）对正实数 $x_1,\cdots,x_n$，成立 $QM \geqslant AM \geqslant GM \geqslant HM$，其中

$$QM=\sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}}, \quad AM=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

$$GM=\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}, \quad HM=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

所有不等式的等号都当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$，数 QM,AM,GM 和 HM 分别被称为平方平均，算术平均，几何平均以及调和平均.

定理 2.17 （一般的平均不等式）设 $x_1,\cdots,x_n$ 是正实数，对 $p\in\mathbf{R}$，定义 $x_1,\cdots,x_n$ 的 p 阶平均为

$$M_p=\left(\frac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}，如果\ p\neq 0$$

以及

$$M_q=\lim_{p\to q}M_p，如果\ q\in\{\pm\infty,0\}$$

特别，$\max x_i,QM,AM,GM,HM$ 和 $\min x_i$ 分别是 $M_\infty,M_2,M_1,M_0,M_{-1}$ 和 $M_{-\infty}$，那么

$$M_p\leqslant M_q,\quad 只要\ p\leqslant q$$

定理 2.18 （柯西一许瓦兹(Cauchy-Schwarz) 不等式）设 $a_i,b_i,i=1,2,\cdots,n$ 是实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

当且仅当存在 $c\in\mathbf{R}$ 使得 $b_i=ca_i,i=1,\cdots,n$ 时，等号成立.

定理 2.19 （和尔窦(Hölder) 不等式）设 $a_i,b_i,i=1,2,\cdots,n$ 是非负实数，p,q 是使得 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的正实数，则

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

当且仅当存在 $c\in\mathbf{R}$ 使得 $b_i=ca_i,i=1,\cdots,n$ 时，等号成立. Cauchy-Schwarz(柯西一许瓦兹) 不等式是 Hölder(和尔窦) 不等式在 $p=q=2$ 时的特殊情况.

定理 2.20 （闵科夫斯基(Minkovski) 不等式）设 $a_i,b_i,i=1,2,\cdots,n$ 是非负实数，p 是任意不小于 1 的实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

当 $p>1$ 时，当且仅当存在 $c\in\mathbf{R}$ 使得 $b_i=ca_i,i=1,\cdots,n$ 时，等号成立，当 $p=1$ 时，等号总是成立.

定理 2.21 （切比雪夫(Chebyshev) 不等式）设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$ 以及 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$ 是实数，则

$$n\sum_{i=1}^n a_ib_i\geqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)\geqslant n\sum_{i=1}^n a_ib_{n+1-i}$$

当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时，上面的两个不等式的等号同时成立.

定义 2.22 定义在区间 I 上的实函数 f 称为是凸的，如果对所有的 $x,y\in I$ 和所有使得 $\alpha+\beta=1$ 的 $\alpha,\beta>0$，都有 $f(\alpha x+\beta y)\leqslant\alpha f(x)+\beta f(y)$，函数 f 称为是凹的，如果成立

相反的不等式,即如果 $-f$ 是凸的.

定理 2.23　如果 f 在区间 I 上连续,那么 f 在区间 I 是凸函数的充分必要条件是对所有 $x,y\in I$,成立

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

定理 2.24　如果 f 是可微的,那么 f 是凸函数的充分必要条件是它的导函数 f' 是不减的.类似的,可微函数 f 是凹函数的充分必要条件是它的导函数 f' 是不增的.

定理 2.25　(琴生(Jensen) 不等式) 如果 $f:I\to R$ 是凸函数,那么对所有的 $\alpha_i\geqslant 0$, $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1$ 和所有的 $x_i\in I$ 成立不等式

$$f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_nf(x_n)$$

对于凹函数,成立相反的不等式.

定理 2.26　(穆黑(Muirhead) 不等式) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$,对正实数的 n 元组 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,定义

$$T_a(x_1,\cdots,x_n)=\sum y_1^{a_1}\cdots y_n^{a_n}$$

是对 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的所有排列 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 求和.称 n 元组 a 是优超 n 元组 b 的,如果

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$$

并且对 $k=1,\cdots,n-1$,有

$$a_1+\cdots+a_k\geqslant b_1+\cdots+b_k$$

如果不增的 n 元组 a 优超不增的 n 元组 b,那么成立以下不等式

$$T_a(x_1,\cdots,x_n)\geqslant T_b(x_1,\cdots,x_n)$$

等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立.

定理 2.27　(舒尔(Schur) 不等式) 利用对穆黑不等式使用的记号

$$T_{\lambda+2\mu,0,0}(x_1,x_2,x_3)+T_{\lambda,\mu,\mu}(x_1,x_2,x_3)\geqslant 2T_{\lambda+\mu,\mu,0}(x_1,x_2,x_3)$$

其中 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}^+$,等号当且仅当 $x_1=x_2=x_3$ 或 $x_1=x_2,x_3=0$(以及类似情况) 时成立.

2.1.4　群和域

定义 2.28　群是一个具有满足以下条件的运算 $*$ 的非空集合 G:

(1) 对所有的 $a,b,c\in G$, $a*(b*c)=(a*b)*c$;

(2) 存在一个唯一的加法元 $e\in G$ 使得对所有的 $a\in G$ 有 $e*a=a*e=a$;

(3) 对每一个 $a\in G$,存在一个唯一的逆元 $a^{-1}=b\in G$ 使得 $a*b=b*a=e$.

如果 $n\in\mathbf{Z}$,则当 $n\geqslant 0$ 时,定义 a^n 为 $a*a*\cdots*a$(n 次),否则定义为 $(a^{-1})^{-n}$.

定义 2.29　群 $\Gamma=(G,*)$ 称为是交换的或阿贝尔群,如果对任意 $a,b\in G$, $a*b=b*a$.

定义 2.30　集合 A 生成群 $(G,*)$,如果 G 的每个元用 A 的元素的幂和运算 $*$ 得出.换句话说,如果 A 是群 G 的生成子,那么每个元素 $g\in G$ 就可被写成 $a_1^{i_1}*\cdots*a_n^{i_n}$,其中对 $j=1,2,\cdots,na_j\in A$ 而 $i_j\in\mathbf{Z}$.

定义 2.31　当存在使得 $a^n=e$ 的 n 时, $a\in G$ 的阶是使得 $a^n=e$ 成立的最小的 $n\in\mathbf{N}$.一个群的阶是指其元素的个数,如果群的每个元素的阶都是有限的,则称其为有限阶的.

定义 2.32　(拉格朗日(Lagrange) 定理) 在有限群中,元素的阶必整除群的阶.

定义 2.33　一个环是一个具有两种运算"+"和"•"的非空集合R使得$(R,+)$是阿贝尔群，并且对任意$a,b,c\in R$，有：

(1)$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$；

(2)$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$以及$c\cdot(a+b)=c\cdot a+c\cdot b$.

一个环称为是交换的，如果对任意$a,b\in R$，$a\cdot b=b\cdot a$，并且具有乘法单位元$i\in R$，使得对所有的$a\in R$，$i\cdot a=a\cdot i$.

定义 2.34　一个域是一个具有单位元的交换环，在这种环中，每个不是加法单位元的元素a有乘法逆a^{-1}，使得$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=i$.

定理 2.35　下面是一些群，环和域的通常的例子：

群：$(\mathbf{Z}_n,+)$，$(\mathbf{Z}_p\backslash\{0\},\cdot)$，$(\mathbf{Q},+)$，$(\mathbf{R},+)$，$(\mathbf{R}\backslash\{0\},\cdot)$；

环：$(\mathbf{Z}_n,+,\cdot)$，$(\mathbf{Z},+,\cdot)$，$(\mathbf{Z}[x],+,\cdot)$，$(\mathbf{R}[x],+,\cdot)$；

域：$(\mathbf{Z}_p,+,\cdot)$，$(Q,+,\cdot)$，$(Q(\sqrt{2}),+,\cdot)$，$(\mathbf{R},+,\cdot)$，$(\mathbf{C},+,\cdot)$.

第2节　分　析

定义 2.36　说序列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$有极限$a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$（也记为$a_n\to a$），如果对任意$\varepsilon>0$，都存在$n_\varepsilon\in\mathbf{N}$，使得当$n\geqslant n_\varepsilon$时，成立$|a_n-a|<\varepsilon$.

说函数$f:(a,b)\to\mathbf{R}$有极限$y=\lim\limits_{x\to c}f(x)$，如果对任意$\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，使得对任意$x\in(a,b)$，$0<|x-c|<\delta$，都有$|f(x)-y|<\varepsilon$.

定义 2.37　称序列x_n收敛到$x\in\mathbf{R}$，如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛到$s\in\mathbf{R}$的含义为$\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{m}x_n=s$. 一个不收敛的序列或级数称为是发散的.

定理 2.38　如果序列a_n单调并且有界，则它必是收敛的.

定义 2.39　称函数f在区间$[a,b]$上是连续的，如果对每个$x_0\in[a,b]$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

定义 2.40　称函数$f:(a,b)\to\mathbf{R}$在点$x_0\in(a,b)$是可微的，如果以下极限存在

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

称函数在(a,b)上是可微的，如果它在每一点$x_0\in(a,b)$都是可微的. 函数f'称为是函数f的导数，类似的，可定义f'的导数f''，它称为函数f的二阶导数，等等.

定理 2.41　可微函数是连续的. 如果f和g都是可微的，那么fg，$\alpha f+\beta g(\alpha,\beta\in\mathbf{R})$，$f\circ g$，$\frac{1}{f}$（如果$f\neq0$），$f^{-1}$（如果它可被有意义的定义）都是可微的. 并且成立

$$(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$$

$$(fg)'=f'g+fg'$$

$$(f\circ g)'=(f'\circ g)\cdot g'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f'}{f^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

$$(f^{-1})'=\frac{1}{(f'\circ f^{-1})}$$

定理 2.42　以下是一些初等函数的导数(a 表示实常数)

$$(x^a)'=ax^{a-1}$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$(a^x)'=a^x\ln a$$

$$(\sin x)'=\cos x$$

$$(\cos x)'=-\sin x$$

定理 2.43　(费马(Fermat)定理)设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 是可微函数,且函数 f 在此区间内达到其极大值或极小值.如果 $x_0\in(a,b)$ 是一个极值点(即函数在此点达到极大值或极小值),那么 $f'(x_0)=0$.

定理 2.44　(罗尔(Roll)定理)设 $f(x)$ 是定义在$[a,b]$上的连续可微函数,且 $f(a)=f(b)=0$,则存在 $c\in(a,b)$,使得 $f'(c)=0$.

定义 2.45　定义在 $\mathbf{R}^n$ 的开子集 D 上的可微函数 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 称为是相关的,如果存在非零的可微函数 $F:\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}$ 使得 $F(f_1,\cdots,f_k)$ 在 D 的某个开子集上恒同于 0.

定义 2.46　函数 $f_1,\cdots,f_k:D\to\mathbf{R}$ 是独立的充分必要条件为 $k\times n$ 矩阵 $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{i,j}$ 的秩为 k,即在某个点,它有 k 行是线性无关的.

定理 2.47　(拉格朗日(Lagrange)乘数)设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 的开子集,且 $f,f_1,\cdots,f_k:D\to\mathbf{R}$ 是独立无关的可微函数.设点 a 是函数 f 在 D 内的一个极值点,使得 $f_1=f_2=\cdots=f_n=0$,则存在实数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$(所谓的拉格朗日乘数)使得 a 是函数 $F=f+\lambda_1f_1+\cdots+\lambda_kf_k$ 的平衡点,即在点 a 使得 F 的偏导数为 0 的点.

定义 2.48　设 f 是定义在$[a,b]$上的实函数,且设 $a=x_0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n=b$ 以及 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$,和 $S=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})f(\xi_k)$ 称为达布(Darboux)和,如果 $I=\lim_{\delta\to 0}S$ 存在(其中 $\delta=\max_k(x_k-x_{k-1})$),则称 f 是可积的,并称 I 是它的积分.每个连续函数在有限区间上都是可积的.

第 3 节　几　何

2.3.1　三角形的几何

定义 2.49　三角形的垂心是其高线的交点.

定义 2.50　三角形的外心是其外接圆的圆心,它是三角形各边的垂直平分线的交点.

定义 2.51　三角形的内心是其内切圆的圆心,它是其各角的角平分线的交点.

定义 2.52　三角形的重心是其各边中线的交点.

定理 2.53　对每个非退化的三角形,垂心,外心,内心,重心都是良定义的.

定理 2.54 (欧拉(Euler) 线) 任意三角形的垂心 H,重心 G 和外心 O 位于一条直线上(欧拉线),且满足 $\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{GO}$.

定理 2.55 (9 点圆) 三角形从顶点 A,B,C 向对边所引的垂足,AB,BC,CA,AH,BH,CH 各线段的中点位于一个圆上(9 点圆).

定理 2.56 (费尔巴哈(Feuerbach) 定理) 三角形的 9 点圆和其内切圆和三个外切圆相切.

定理 2.57 给了 $\triangle ABC$,设 $\triangle ABC'$,$\triangle AB'C$ 和 $\triangle A'BC$ 是向外的等边三角形,则 AA',BB',CC' 交于一点,称为托里拆利(Torricelli) 点.

定义 2.58 设 ABC 是一个三角形,P 是一点,而 X,Y,Z 分别是从 P 向 BC,AC,AB 所引垂线的垂足,则 $\triangle XYZ$ 称为 $\triangle ABC$ 的对应于点 P 的 Pedal(佩多) 三角形.

定理 2.59 (西姆松(Simson) 线) 当且仅当点 P 位于 ABC 的外接圆上时,佩多(Pedal) 三角形是退化的,即 X,Y,Z 共线,点 X,Y,Z 共线时,它们所在的直线称为西姆松(Simson) 线.

定理 2.60 (卡农(Carnot) 定理) 从 X,Y,Z 分别向 BC,CA,AB 所作的垂线共点的充分必要条件是

$$BX^2-XC^2+CY^2-YA^2+AZ^2-ZB^2=0$$

定理 2.61 (戴沙格(Desargue) 定理) 设 $A_1B_1C_1$ 和 $A_2B_2C_2$ 是两个三角形. 直线 A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2 共点或互相平行的充分必要条件是 $A=B_1C_2\cap B_2C_1$,$B=C_1A_2\cap A_1C_2$,$C=A_1B_2\cap A_2B_1$ 共线.

2.3.2 向量几何

定义 2.62 对任意两个空间中的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,定义其数量积(又称点积) 为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi$,而其向量积为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}$,其中 $\varphi=\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$,而 $\boldsymbol{p}$ 是一个长度为 $|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot|\sin\varphi|$ 的向量,它垂直于由 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所确定的平面,并使得有顺序的三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{p}$ 是正定向的(注意如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线,则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$). 这些积关于两个向量都是线性的. 数量积是交换的,而向量积是反交换的,即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$. 我们也定义三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积为 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

原书注:向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积有时也表示成 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

定理 2.63 (泰勒斯(Thale) 定理) 设直线 AA' 和 BB' 交于点 O,$A'\neq O\neq B'$. 那么 $AB\ /\!/\ A'B'\Leftrightarrow\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OA'}}=\frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OB'}}$,(其中 $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ 表示两个非零的共线向量的比例).

定理 2.64 (塞瓦(Ceva) 定理) 设 ABC 是一个三角形,而 X,Y,Z 分别是直线 BC,CA,AB 上不同于 A,B,C 的点,那么直线 AX,BY,CZ 共点的充分必要条件是

$$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}}=1$$

或等价的

$$\frac{\sin\angle BAX}{\sin\angle XAC}\cdot\frac{\sin\angle CBY}{\sin\angle YBA}\cdot\frac{\sin\angle ACZ}{\sin\angle ZCB}=1$$

(最后的表达式称为三角形式的塞瓦定理).

定理 2.65 (梅尼劳斯(Menelaus) 定理) 利用塞瓦定理中的记号,点 X,Y,Z 共线的充分必要条件是

$$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = -1$$

定理 2.66 (斯特瓦尔特(Stewart) 定理) 设 D 是直线 BC 上任意一点,则

$$AD^2 = \frac{\overrightarrow{DC}}{\overrightarrow{BC}} BD^2 + \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}} CD^2 - \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC}$$

特别,如果 D 是 BC 的中点,则

$$4AD^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2$$

2.3.3 重心

定义 2.67 一个质点(A,m)是指一个具有质量 $m>0$ 的点 A.

定义 2.68 质点系(A_i,m_i),$i=1,2,\cdots,n$ 的质心(重心)是指一个使得 $\sum_i m_i \overrightarrow{TA_i}=0$ 的点.

定理 2.69 (莱布尼兹(Leibniz) 定理) 设 T 是总质量为 $m=m_1+\cdots+m_n$ 的质点系 $\{(A_i,m_i)\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 的质心,并设 X 是任意一个点,那么

$$\sum_{i=1}^{n} m_i XA_i^{\ 2} = \sum_{i=1}^{n} m_i TA_i^{\ 2} + mXT^2$$

特别,如果 T 是 $\triangle ABC$ 的重心,而 X 是任意一个点,那么

$$AX^2 + BX^2 + CX^2 = AT^2 + BT^2 + CT^2 + 3XT^2$$

2.3.4 四边形

定理 2.70 四边形 $ABCD$ 是共圆的(即 $ABCD$ 存在一个外接圆)的充分必要条件是

$$\angle ACB = \angle ADB$$

或

$$\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$$

定理 2.71 (托勒玫(Ptolemy) 定理) 凸四边形 $ABCD$ 共圆的充分必要条件是

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

对任意四边形 $ABCD$ 则成立 Ptolemy(托勒玫) 不等式(见 2.3.7 几何不等式).

定理 2.72 (开世(Casey) 定理) 设四个圆 k_1,k_2,k_3,k_4 都和圆 k 相切.如果圆 k_i 和 k_j 都和圆 k 内切或外切,那么设 t_{ij} 表示由圆 k_i 和 $k_j(i,j\in\{1,2,3,4\})$ 所确定的外公切线的长度,否则设 t_{ij} 表示内公切线的长度.那么乘积 $t_{12}t_{34}$,$t_{13}t_{24}$ 以及 $t_{14}t_{23}$ 之一是其余二者之和.

圆 k_1,k_2,k_3,k_4 中的某些圆可能退化成一个点,特别设 A,B,C 是圆 k 上的三个点,圆 k 和圆 k' 在一个不包含点 B 的 AC 弧上相切,那么我们有 $AC\cdot b=AB\cdot c+BC\cdot a$,其中 a,b 和 c 分别是从点 A,B 和 C 向 AC 所作的切线的长度.托勒玫定理是开世定理在四个圆都退化时的特殊情况.

定理 2.73 凸四边形 $ABCD$ 相切(即 $ABCD$ 存在一个内切圆)的充分必要条件是

$$AB + CD = BC + DA$$

定理 2.74 对空间中任意四点 A,B,C,D,$AC\perp BD$ 的充分必要条件是

$$AB^2+CD^2=BC^2+DA^2$$

定理 2.75 (牛顿定理) 设 $ABCD$ 是四边形,$AD\cap BC=E$,$AB\cap DC=F$(那种点 A,B,C,D,E,F 构成一个完全四边形). 那么 AC,BD 和 EF 的中点是共线的. 如果 $ABCD$ 相切,那么其内心也在这条直线上.

定理 2.76 (布罗卡(Brocard) 定理) 设 $ABCD$ 是圆心为 O 的圆内接四边形,并设 $P=AB\cap CD$,$Q=AD\cap BC$,$R=AC\cap BD$,那么 O 是 $\triangle PQR$ 的垂心.

2.3.5 圆的几何

定理 2.77 (帕斯卡(Pascal) 定理) 如果 A_1,A_2,A_3,B_1,B_2,B_3 是圆 γ 上不同的点,那么点 $X_1=A_2B_3\cap A_3B_2$,$X_2=A_1B_3\cap A_3B_1$ 和 $X_3=A_1B_2\cap A_2B_1$ 是共线的. 在 γ 是两条直线的特殊情况下,这一结果称为帕普斯定理.

定理 2.78 (布里安桑(Brianchon) 定理) 设 $ABCDEF$ 是任意圆内接凸六边形,那么 AD,BE 和 CF 交于一点.

定理 2.79 (蝴蝶定理) 设 AB 是圆 k 上的一条线段,C 是它的中点. 设 p 和 q 是通过 C 的两条不同的直线,分别与圆 k 在 AB 的一侧交于 P 和 Q,而在另一侧交于 P' 和 Q',设 E 和 F 分别是 PQ' 和 $P'Q$ 与 AB 的交点,那么 $CE=CF$.

定义 2.80 点 X 关于圆 $k(O,r)$ 的幂定义为 $P(X)=OX^2-r^2$. 设 l 是任一条通过 X 并交圆 k 于 A 和 B 的线(当 l 是切线时,$A=B$),有 $P(X)=\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB}$.

定义 2.81 两个圆的根轴是关于这两个圆的幂相同的点的轨迹. 圆 $k_1(O_1,r_1)$ 和 $k_2(O_2,r_2)$ 的根轴垂直于 O_1O_2. 三个不同的圆的根轴是共点的或互相平行的. 如果根轴是共点的,则它们的交点称为根心.

定义 2.82 一条不通过点 O 的直线 l 关于圆 $k(O,r)$ 的极点是一个位于 l 的与 O 相反一侧的使得 $OA\perp l$,且 $d(O,l)\cdot OA=r^2$ 的点 A. 特别,如果 l 和 k 交于两点,则它的极点就是过这两个点的切线的交点.

定义 2.83 用上面的定义中的记号,称点 A 的极线是 l,特别,如果 A 是 k 外面的一点,而 AM,AN 是 k 的切线($M,N\in k$),那么 MN 就是 A 的极线.

可以对一般的圆锥曲线类似的定义极点和极线的概念.

定理 2.84 如果点 A 属于点 B 的极线,则点 B 也属于点 A 的极线.

2.3.6 反演

定义 2.85 一个平面 π 围绕圆 $k(O,r)$(圆属于 π)的反演是一个从集合 $\pi\backslash\{O\}$ 到自身的变换,它把每个点 P 变为一个在 $\pi\backslash\{O\}$ 上使得 $OP\cdot OP'=r^2$ 的点. 在下面的叙述中,我们将默认排除点 O.

定理 2.86 在反演下,圆 k 上的点不动,圆内的点变为圆外的点,反之亦然.

定理 2.87 如果 A,B 两点在反演下变为 A',B' 两点,那么 $\angle OAB=\angle OB'A'$,$ABB'A'$ 共圆且此圆垂直于 k. 一个垂直于 k 的圆变为自身,反演保持连续曲线(包括直线和圆)之间的角度不变.

定理 2.88 反演把一条不包含 O 的直线变为一个包含 O 的圆,包含 O 的直线变成自身. 不包含 O 的圆变为不包含 O 的圆,包含 O 的圆变为不包含 O 的直线.

2.3.7 几何不等式

定理 2.89 (三角不等式)对平面上的任意三个点 A,B,C

$$AB+BC\geqslant AC$$

当等号成立时 A,B,C 共线,且按照这一次序从左到右排列时,等号成立.

定理 2.90 (托勒玫不等式)对任意四个点 A,B,C,D 成立

$$AC\cdot BD\leqslant AB\cdot CD+AD\cdot BC$$

定理 2.91 (平行四边形不等式)对任意四个点 A,B,C,D 成立

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2\geqslant AC^2+BD^2$$

当且仅当 $ABCD$ 是一个平行四边形时等号成立.

定理 2.92 如果 $\triangle ABC$ 的所有的角都小于或等于120° 时,那么当 X 是托里拆利(Torricelli)点时,$AX+BX+CX$ 最小,在相反的情况下,X 是钝角的顶点.使得 $AX^2+BX^2+CX^2$ 最小的点 X_2 是重心(见莱布尼兹定理).

定理 2.93 (爱尔多斯-摩德尔(Erdös-Mordell)不等式).设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点,而 P 在 BC,AC,AB 上的投影分别是 X,Y,Z,那么

$$PA+PB+PC\geqslant 2(PX+PY+PZ)$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 是等边三角形以及 P 是其中心时等号成立.

2.3.8 三角

定义 2.94 三角圆是圆心在坐标平面的原点的单位圆.设 A 是点$(1,0)$ 而 $P(x,y)$ 是三角圆上使得 $\angle AOP=\alpha$ 的点.那么我们定义

$$\sin\alpha=y,\cos\alpha=x,\tan\alpha=\frac{y}{x},\cot\alpha=\frac{x}{y}$$

定理 2.95 函数 sin 和 cos 是周期为 2π 的周期函数,函数 tan 和 cot 是周期为 π 的周期函数,成立以下简单公式

$$\sin^2x+\cos^2x=1,\sin 0=\sin\pi=0$$

$$\sin(-x)=-\sin x,\cos(-x)=\cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

从这些公式易于导出其他的公式.

定理 2.96 对三角函数成立以下加法公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\alpha\pm\cot\beta}$$

定理 2.97 对三角函数成立以下倍角公式

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1, \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$
$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}, \tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

定理 2.98　对任意 $x \in \mathbf{R}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$,其中 $t = \tan \frac{x}{2}$.

定理 2.99　积化和差公式

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$
$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$
$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha-\beta)$$

定理 2.100　三角形的角 α,β,γ 满足

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$$
$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

定理 2.101　(棣(译者注:音立)模佛(De Moivre 公式))

$$(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n = \cos nx + \mathrm{i}\sin nx$$

其中 $\mathrm{i}^2 = -1$.

2.3.9　几何公式

定理 2.102　(海伦(Heron)公式)设三角形的边长为 a,b,c,半周长为 s,则它的面积可用这些量表成

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

定理 2.103　(正弦定理)三角形的边 a,b,c 和角 α,β,γ 满足

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

其中 R 是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径.

定理 2.104　(余弦定理)三角形的边和角满足

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

定理 2.105　$\triangle ABC$ 的外接圆半径 R 和内切圆半径 r 满足

$$R = \frac{abc}{4S}$$

和

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1)$$

如果 x,y,z 表示一个锐角三角形的外心到各边的距离,则

$$x + y + z = R + r$$

定理 2.106　(欧拉公式)设 O 和 I 分别是 $\triangle ABC$ 的外心和内心,则

$$OI^2 = R(R-2r)$$

其中 R 和 r 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径和内切圆半径,因此 $R \geqslant 2r$.

定理 2.107　设四边形的边长为 a,b,c,d,半周长为 p,在顶点 A,C 处的内角分别为 α,γ,则其面积为

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}$$

如果 $ABCD$ 是共圆的,则上述公式成为

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

定理 2.108 (匹多(pedal)三角形的欧拉定理)设 X,Y,Z 是从点 P 向 $\triangle ABC$ 的各边所引的垂足.又设 O 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心,R 是其半径,则

$$S_{\triangle XYZ}=\frac{1}{4}\left|1-\frac{OP^2}{R^2}\right|S_{\triangle ABC}$$

此外,当且仅当 P 位于 $\triangle ABC$ 的外接圆(见西姆松(Simson)线)上时,$S_{\triangle XYZ}=0$.

定理 2.109 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 是坐标空间中的三个向量,那么

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_1b_2-a_2b_1,a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3)$$

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\left\|\begin{matrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{matrix}\right\|$$

定理 2.110 $\triangle ABC$ 的面积和四面体 $ABCD$ 的体积分别等于

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

和

$$|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]|$$

定理 2.111 (卡瓦列里(Cavalieri)原理)如果两个立体被同一个平面所截的截面的面积总是相等的,则这两个立体的体积相等.

第4节　数　论

2.4.1 可除性和同余

定义 2.112 $a,b\in\mathbf{N}$ 的最大公因数 $(a,b)=\gcd(a,b)$ 是可以整除 a 和 b 的最大整数.如果 $(a,b)=1$,则称正整数 a 和 b 是互素的.$a,b\in\mathbf{N}$ 的最小公倍数 $[a,b]=\operatorname{lcm}(a,b)$ 是可以被 a 和 b 整除的最小整数.成立

$$[a,b](a,b)=ab$$

上面的概念容易推广到两个数以上的情况,即我们也可以定义 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $[a_1,a_2,\cdots,a_n]$.

定理 2.113 (欧几里得(Euclid)算法)由于 $(a,b)=(|a-b|,a)=(|a-b|,b)$,由此通过每次把 a 和 b 换成 $|a-b|$ 和 $\min\{a,b\}$ 而得出一条从正整数 a 和 b 获得 (a,b) 的链,直到最后两个数成为相等的数.这一算法可被推广到两个数以上的情况.

定理 2.114 (欧几里得算法的推论)对每对 $a,b\in\mathbf{N}$,存在 $x,y\in\mathbf{Z}$ 使得 $ax+by=(a,b)$,(a,b) 是使得这个式子成立的最小正整数.

定理 2.115 (欧几里得算法的第二个推论)设 $a,m,n\in\mathbf{N}$,$a>1$,则成立

$$(a^m-1,a^n-1)=a^{(m,n)}-1$$

定理 2.116 （算数基本定理）每个正整数当不计素数的次序时都可以用唯一的方式被表成素数的乘积.

定理 2.117 算数基本定理对某些其他的数环也成立，例如 $\mathbf{Z}[i]=\{a+bi \mid a,b\in\mathbf{Z}\}$，$\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$，$\mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$，$\mathbf{Z}[\omega]$（其中 ω 是 1 的 3 次复根）. 在这些情况下，因数分解当不计次序和 1 的因子时是唯一的.

定义 2.118 称整数 a,b 在模 n 下同余，如果 $n \mid a-b$，我们把这一事实记为

$$a\equiv b \pmod n$$

定理 2.119 （中国剩余定理）如果 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 是两两互素的正整数，而 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 和 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 是使得 $(a_i,m_i)=1(i=1,2,\cdots,k)$ 的整数，那么同余式组

$$a_ix\equiv c_i \pmod{m_i},i=1,2,\cdots,k$$

在模 $m_1m_2\cdots m_k$ 下有唯一解.

2.4.2 指数同余

定理 2.120 （威尔逊(Wilson)定理）如果 p 是素数，则 $p \mid (p-1)!+1$.

定理 2.121 （费马(Fermat)小定理）设 p 是一个素数，而 a 是一个使得 $(a,p)=1$ 的整数，则

$$a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$$

这个定理是欧拉定理的特殊情况.

定义 2.122 对 $n\in\mathbf{N}$，定义欧拉函数是在所有小于 n 的整数中与 n 互素的整数的个数. 成立以下公式

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

其中 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的素因子分解式.

定理 2.113 （欧拉定理）设 n 是自然数，而 a 是一个使得 $(a,n)=1$ 的整数，那么

$$a^{\varphi(n)}\equiv 1 \pmod n$$

定理 2.114 （元根的存在性）设 p 是一个素数，则存在一个 $g\in\{1,2,\cdots p-1\}$（称为模 p 的元根）使得在模 p 下，集合 $\{1,g,g^2,\cdots,g^{p-2}\}$ 与集合 $\{1,2,\cdots p-1\}$ 重合.

定义 2.115 设 p 是一个素数，而 α 是一个非负整数，称 p^α 是 p 的可整除 a 的恰好的幂（而 α 是一个恰好的指数），如果 $p^\alpha \mid a$，而 $p^{\alpha+1} \mid a$.

定理 2.16 设 a,n 是正整数，而 p 是一个奇素数，如果 $p^\alpha(\alpha\in\mathbf{N})$ 是 p 的可整除 $a-1$ 的恰好的幂，那么对任意整数 $\beta\geqslant 0$，当且仅当 $p^\beta \mid n$ 时，$p^{\alpha+\beta} \mid a^n-1$（见 SL1997—14）.

对 $p=2$ 成立类似的命题. 如果 $2^\alpha(\alpha\in\mathbf{N})$ 是 p 的可整除 a^2-1 的恰好的幂，那么对任意整数 $\beta\geqslant 0$，当且仅当 $2^{\beta+1} \mid n$ 时，$2^{\alpha+\beta} \mid a^n-1$（见 SL1989—27）.

2.4.2 二次丢番图(Diophantine)方程

定理 2.127 $a^2+b^2=c^2$ 的整数解由 $a=t(m^2-n^2)$，$b=2tmn$，$c=t(m^2+n^2)$ 给出（假设 b 是偶数），其中 $t,m,n\in\mathbf{Z}$. 三元组 (a,b,c) 称为毕达哥拉斯数（译者注：在我国称为勾股数）（如果 $(a,b,c)=1$，则称为本原的毕达哥拉斯数（勾股数））.

定义 2.128 设 $D\in\mathbf{N}$ 是一个非完全平方数，则称不定方程

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

是贝尔(Pell)方程,其中 $x, y \in \mathbf{Z}$.

定理 2.129　如果(x_0, y_0)是贝尔方程 $x^2 - Dy^2 = 1$ 在 $\mathbf{N}$ 中的最小解,则其所有的整数解(x, y)由 $x + y\sqrt{D} = \pm(x_0 + y_0\sqrt{D})^n, n \in \mathbf{Z}$ 给出.

定义 2.130　整数 a 称为是模 p 的平方剩余,如果存在 $x \in \mathbf{Z}$,使得 $x^2 \equiv a \pmod p$,否则称为模 p 的非平方剩余.

定义 2.131　对整数 a 和素数 p 定义 Legendre(勒让德)符号为

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, \text{如果 } a \text{ 是模 } p \text{ 的二次剩余,且 } p \mid a \\ 0, \text{如果 } p \mid a \\ -1, \text{其他情况} \end{cases}$$

显然,如果 $p \mid a$,则

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a+p}{p}\right), \left(\frac{a^2}{p}\right) = 1$$

勒让德(Legendre)符号是积性的,即

$$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$$

定理 2.132　(欧拉判据)对奇素数 p 和不能被 p 整除的整数 a

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$$

定理 2.133　对素数 $p > 3$, $\left(\frac{-1}{p}\right)$, $\left(\frac{2}{p}\right)$ 和 $\left(\frac{-3}{p}\right)$ 等于 1 的充分必要条件分别为 $p \equiv 1 \pmod 4$, $p \equiv \pm 1 \pmod 8$ 和 $p \equiv 1 \pmod 6$.

定理 2.134　(高斯(Gauss)互反律)对任意两个不同的奇素数 p 和 q,成立

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

定义 2.135　对整数 a 和奇的正整数 b,定义 Jacobi(雅可比)符号如下

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{a}{p_k}\right)^{\alpha_k}$$

其中 $b = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 b 的素因子分解式.

定理 2.136　如果$\left(\frac{a}{b}\right) = -1$,那么 a 是模 b 的非二次剩余,但是逆命题不成立.对雅可比(Jacobi)符号来说,除了欧拉判据之外,勒让德符号的所有其余性质都保留成立.

2.4.4　法雷(Farey)序列

定义 2.137　设 n 是任意正整数,Farey(法雷)序列 F_n 是由满足 $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$, $(a, b) = 1$ 的所有从小到大排列的有理数$\frac{a}{b}$所形成的序列.例如 $F_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}$.

定理 2.138　如果$\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$ 和$\frac{p_3}{q_3}$ 是法雷序列中三个相继的项,则

$$p_2 q_1 - p_1 q_2 = 1$$

$$\frac{p_1+p_3}{q_1+q_3}=\frac{p_2}{q_2}$$

第5节　组　合

2.5.1　对象的计数

许多组合问题涉及对满足某种性质的集合中的对象计数，这些性质可以归结为以下概念的应用.

定义 2.139　k 个元素的阶为 n 的选排列是一个从 $\{1,2,\cdots,k\}$ 到 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的映射. 对给定的 n 和 k，不同的选排列的数目是 $V_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$.

定义 2.140　k 个元素的阶为 n 的可重复的选排列是一个从 $\{1,2,\cdots,k\}$ 到 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任意的映射. 对给定的 n 和 k，不同的可重复的选排列的数目是 $\overline{V}_n^k=k^n$.

定义 2.141　阶为 n 的全排列是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 到自身的一个一对一映射(即当 $k=n$ 时的选排列的特殊情况)，对给定的 n，不同的全排列的数目是 $P_n=n!$.

定义 2.142　k 个元素的阶为 n 的组合是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个 k 元素的子集，对给定的 n 和 k，不同的组合数是 $C_n^k=\binom{n}{k}$.

定义 2.143　一个阶为 n 可重复的全排列是一个 $\{1,2,\cdots,n\}$ 到 n 个元素的积集的一个一对一映射. 一个积集是一个其中的某些元素被允许是不可区分的集合，例如，$\{1,1,2,3\}$.

如果 $\{1,2,\cdots,s\}$ 表示积集中不同的元素组成的集合，并且在积集中元素 i 出现 α_i 次，那么不同的可重复的全排列的数目是

$$P_{n,\alpha_1,\cdots,\alpha_s}=\frac{n!}{\alpha_1!\ \alpha_2!\ \cdots\alpha_s!}$$

组合是积集有两个不同元素的可重复的全排列的特殊情况.

定理 2.144　(鸽笼原理)如果把元素数目为 $kn+1$ 的集合分成 n 个互不相交的子集，则其中至少有一个子集至少要包含 $k+1$ 个元素.

定理 2.145　(容斥原理)设 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 是集合 S 的一族子集，那么 S 中那些不属于所给子集族的元素的数目由以下公式给出

$$|S\backslash(S_1\cup\cdots\cup S_n)|=|S|-\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}(-1)^k|S_{i_1}\cap\cdots\cap S_{i_k}|$$

2.5.2　图论

定义 2.146　一个图 $G=(V,E)$ 是一个顶点 V 和 V 中某些元素对，即边的积集 E 所组成的集合. 对 $x,y\in V$，当 $(x,y)\in E$ 时，称顶点 x 和 y 被一条边所连接，或称这一对顶点是这条边的端点.

一个积集为 E 的图可归结为一个真集合(即其顶点至多被一条边所连接)，一个其中没有一个定点是被自身所连接的图称为是一个真图.

有限图是一个$|E|$和$|V|$都有限的图.

定义 2.147　一个有向图是一个 E 中的有方向的图.

定义 2.148　一个包含了 n 个顶点并且每个顶点都有边与其连接的真图称为是一个完全图.

定义 2.149　k 分图(当 $k=2$ 时,称为 2－分图)$K_{i_1,i_2,\cdots,i_k}$ 是那样一个图,其顶点 V 可分成 k 个非空的互不相交的,元素个数分别为 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 的子集,使得 V 的子集 W 中的每个顶点 x 仅和不在 W 中的顶点相连接.

定义 2.150　顶点 x 的阶 $d(x)$ 是 x 作为一条边的端点的次数(那样,自连接的边中就要数两次). 孤立的顶点是阶为 0 的顶点.

定理 2.151　对图 $G=(V,E)$,成立等式

$$\sum_{x\in V}d(x)=2\mid E\mid$$

作为一个推论,有奇数阶的顶点的个数是偶数.

定义 2.152　图的一条路径是一个顶点的有限序列,使得其中每一个顶点都与其前一个顶点相连. 路径的长度是它通过的边的数目. 一条回路是一条终点与起点重合的路径. 一个环是一条在其中没有一个顶点出现两次(除了起点或终点之外) 的回路.

定义 2.153　图 $G=(V,E)$ 的子图 $G'=(V',E')$ 是那样一个图,在其中 $V'\subset V$ 而 E' 仅包含 E 的连接 V' 中的点的边. 图的一个连通分支是一个连通的子图,其中没有一个顶点与此分之外的顶点相连.

定义 2.154　一个树是一个在其中没有环的连通图.

定理 2.155　一个有 n 个顶点的树恰有 $n-1$ 条边且至少有两个阶为 2 的顶点.

定义 2.156　欧拉路是其中每条边恰出现一次的路径. 与此类似,欧拉环是环形的欧拉路.

定理 2.157　有限连通图 G 有一条欧拉路的充分必要条件是:

(1) 如果每个顶点的阶数是偶数,那么 G 包含一条欧拉环;

(2) 如果除了两个顶点之外,所有顶点的阶数都是偶数,那么 G 包含一条不是环路的欧拉路(其起点和终点就是那两个奇数阶的顶点).

定义 2.158　哈密尔顿(Hamilton) 环是一个图 G 的每个顶点恰被包含一次的回路(一个平凡的事实是,这个回路也是一个环).

目前还没有发现判定一个图是否是哈密尔顿环的简单法则.

定理 2.159　设 G 是一个有 n 个顶点的图,如果 G 的任何两个不相邻顶点的阶数之和都大于 n,则 G 有一个哈密尔顿回路.

定理 2.160　(雷姆塞(Ramsey) 定理) 设 $r\geqslant 1$ 而 $q_1,q_2,\cdots,q_s\geqslant r$. 如果 K_n 的所有子图 K_r 都分成了 s 个不同的集合,记为 $A_1,A_2,\cdots,A_s$,那么存在一个最小的正整数 $N(q_1,q_2,\cdots,q_s;r)$ 使得当 $n>N$ 时,对某个 i,存在一个 K_{q_i} 的完全子图,它的子图 K_r 都属于 A_i. 对 $r=2$,这对应于把 K_n 的边用 s 种不同的颜色染色,并寻求子图 K_{q_i} 的第 i 种颜色的单色子图[73].

定理 2.161　利用上面定理的记号,有

$$N(p,q;r)\leqslant N(N(p-1,q;r),N(p,q-1;r);r-1)+1$$

特别
$$N(p,q,2) \leqslant N(p-1,q;2)+N(p,q-1;2)$$

已知 N 的以下值

$$N(p,q;1)=p+q-1$$
$$N(2,p;2)=p$$
$$N(3,3;2)=6, N(3,4;2)=9, N(3,5;2)=14, N(3,6;2)=18$$
$$N(3,7;2)=23, N(3,8;2)=28, N(3,9;2)=36$$
$$N(4,4;2)=18, N(4,5;2)=25$$ [73]

定理 2.162 (图灵(Turan)定理)如果一个有 $n=t(p-1)+r$ 个顶点的简单图的边多于 $f(n,p)$ 条,其中 $f(n,p)=\dfrac{(p-1)n^2-r(p-1-r)}{2(p-1)}$,那么它包含子图 K_p. 有 $f(n,p)$ 个顶点而不含 K_p 的图是一个完全的多重图,它有 r 个元素个数为 $t+1$ 的子集和 $p-1-r$ 个元素个数为 t 的子集[73].

定义 2.163 平面图是一个可被嵌入一个平面的图,使得它的顶点可用平面上的点表示,而边可用平面上连接顶点的线(不一定是直的)来表示,而各边互不相交.

定理 2.164 一个有 n 个顶点的平面图至多有 $3n-6$ 条边.

定理 2.165 (库拉托夫斯基(Kuratowski)定理)K_5 和 $K_{3,3}$ 都不是平面图. 每个非平面图都包含一个和这两个图之一同胚的子图.

定理 2.166 (欧拉公式)设 E 是凸多面体的边数,F 是它的面数,而 V 是它的顶点数,则

$$E+2=F+V$$

对平面图成立同样的公式(这时 F 代表平面图中的区域数).

参考文献

[1] 洛桑斯基 E，鲁索 C. 制胜数学奥林匹克[M]. 候文华，张连芳，译. 刘嘉焜，校. 北京：科学出版社，2003.

[2] 王向东，苏化明，王方汉. 不等式·理论·方法[M]. 郑州：河南教育出版社，1994.

[3] 中国科协青少年工作部，中国数学会. 1978～1986 年国际奥林匹克数学竞赛题及解答[M]. 北京：科学普及出版社，1989.

[4] 单墫，等. 数学奥林匹克竞赛题解精编[M]. 南京：南京大学出版社；上海：学林出版社，2001.

[5] 顾可敬. 1979～1980 中学国际数学竞赛题解[M]. 长沙：湖南科学技术出版社，1981.

[6] 顾可敬. 1981 年国内外数学竞赛题解选集[M]. 长沙：湖南科学技术出版社，1982.

[7] 石华，卫成. 80 年代国际中学生数学竞赛试题详解[M]. 长沙：湖南教育出版社，1990.

[8] 梅向明. 国际数学奥林匹克 30 年[M]. 北京：中国计量出版社，1989.

[9] 单墫，葛军. 国际数学竞赛解题方法[M]. 北京：中国少年儿童出版社，1990.

[10] 丁石孙. 乘电梯·翻硬币·游迷宫·下象棋[M]. 北京：北京大学出版社，1993.

[11] 丁石孙. 登山·赝币·红绿灯[M]. 北京：北京大学出版社，1997.

[12] 黄宣国. 数学奥林匹克大集[M]. 上海：上海教育出版社，1997.

[13] 常庚哲. 国际数学奥林匹克三十年[M]. 北京：中国展望出版社，1989.

[14] 丁石孙. 归纳·递推·无字证明·坐标·复数[M]. 北京：北京大学出版社，1995.

[15] 裘宗沪. 数学奥林匹克试题集锦[M]. 上海：华东师范大学出版社，2005.

[16] 裘宗沪. 数学奥林匹克试题集锦[M]. 上海：华东师范大学出版社，2004.

[17] 数学奥林匹克工作室. 最新竞赛试题选编及解析(高中数学卷)[M]. 北京：首都师范大学出版社，2001.

[18] 第 31 届 IMO 选题委员会. 第 31 届国际数学奥林匹克试题、备选题及解答[M]. 济南：山东教育出版社，1990.

[19] 常庚哲. 数学竞赛(2)[M]. 长沙：湖南教育出版社，1989.

[20] 常庚哲. 数学竞赛(20)[M]. 长沙：湖南教育出版社，1994.

[21] 杨森茂，陈圣德. 第一届至第二十二届国际中学生数学竞赛题解[M]. 福州：福建科学技术出版社，1983.

[22] 江苏师范学院数学系. 国际数学奥林匹克[M]. 南京：江苏科学技术出版社，1980.

[23] 恩格尔 A. 解决问题的策略[M]. 舒五昌，冯志刚，译. 上海：上海教育出版社，2005.

[24] 王连笑. 解数学竞赛题的常用策略[M]. 上海：上海教育出版社，2005.

[25] 江仁俊，应成琭，蔡训武. 国际数学竞赛试题讲解[M]. 武汉：湖北人民出版社，1980.

[26] 单墫. 第二十五届国际数学竞赛[J]. 数学通讯，1985(3).

[27] 付玉章. 第二十九届 IMO 试题及解答[J]. 中学数学，1988(10).

[28] 苏亚贵.正则组合包含连续自然数的个数[J].数学通报,1982(8).
[29] 王根章.一道 IMO 试题的嵌入证法[J].中学数学教学.1999(5).
[30] 舒五昌.第 37 届 IMO 试题解答[J].中等数学,1996(5).
[31] 杨卫平,王卫华.第 42 届 IMO 第 2 题的再探究[J].中学数学研究,2005(5).
[32] 陈永高.第 45 届 IMO 试题解答[J].中等数学,2004(5).
[33] 周金峰,谷焕春.IMO 42－2的进一步推广[J].数学通讯,2004(9).
[34] 魏维.第 42 届国际数学奥林匹克试题解答集锦[J].中学数学,2002(2).
[35] 程华.42 届 IMO 两道几何题另解[J].福建中学数学,2001(6).
[36] 张国清.第 39 届 IMO 试题第一题充分性的证明[J].中等数学,1999(2).
[37] 傅善林.第 42 届 IMO 第五题的推广[J].中等数学,2003(6).
[38] 龚浩生,宋庆.IMO 42－2的推广[J].中学数学,2002(1).
[39] 厉倩.一道 IMO 试题的推广[J].中学数学研究,2002(10).
[40] 邹明.第 40 届 IMO 一赛题的简解[J].中等数学,2001(3).
[41] 许以超.第 39 届国际数学奥林匹克试题及解答[J].数学通报,1999(3).
[42] 余茂迪,宫宋家.用解析法巧解一道 IMO 试题[J].中学数学教学,1997(4).
[43] 宋庆.IMO5－5 的推广[J].中学数学教学,1997(5).
[44] 余世平.从 IMO 试题谈公式 $C_{2n}^{n}=\sum_{i=0}^{n}(C_{n}^{i})^{2}$ 之应用[J].数学通讯,1997(12).
[45] 徐彦明.第 42 届 IMO 第 2 题的另一种推广[J].中学教研(数学),2002(10).
[46] 张伟军.第 41 届 IMO 两赛题的证明与评注[J].中学数学月刊,2000(11).
[47] 许静,孔令恩.第 41 届 IMO 第 6 题的解析证法[J].数学通讯,2001(7).
[48] 魏亚清.一道 IMO 赛题的九种证法[J].中学教研(数学),2002(6).
[49] 陈四川.IMO－38 试题 2 的纯几何解法[J].福建中学数学,1997(6).
[50] 常庚哲,单墫,程龙.第二十二届国际数学竞赛试题及解答[J].数学通报,1981(9).
[51] 李长明.一道 IMO 试题的背景及证法讨论[J].中学数学教学,2000(1).
[52] 王凤春.一道 IMO 试题的简证[J].中学数学研究,1998(10).
[53] 罗增儒.IMO 42－2的探索过程[J].中学数学教学参考,2002(7).
[54] 嵇仲韶.第 39 届 IMO 一道预选题的推广[J].中学数学杂志(高中),1999(6).
[55] 王杰.第 40 届 IMO 试题解答[J].中等数学,1999(5).
[56] 舒五昌.第三十七届 IMO 试题及解答(上)[J].数学通报,1997(2).
[57] 舒五昌.第三十七届 IMO 试题及解答(下)[J].数学通报,1997(3).
[58] 黄志全.一道 IMO 试题的纯平几证法研究[J].数学教学通讯,2000(5).
[59] 段智毅,秦永.IMO－41 第 2 题另证[J].中学数学教学参考,2000(11).
[60] 杨仁宽.一道 IMO 试题的简证[J].数学教学通讯,1998(3).
[61] 相生亚,裘良.第 42 届 IMO 试题第 2 题的推广、证明及其它[J].中学数学研究,2002(2).
[62] 熊斌.第 46 届 IMO 试题解答[J].中等数学,2005(9).
[63] 谢峰,谢宏华.第 34 届 IMO 第 2 题的解答与推广[J].中等数学,1994(1).
[64] 熊斌,冯志刚.第 39 届国际数学奥林匹克[J].数学通讯,1998(12).

[65] 朱恒杰.一道 IMO 试题的推广[J].中学数学杂志,1996(4).

[66] 肖果能,袁平之.第 39 届 IMO 一道试题的研究(Ⅰ)[J].湖南数学通讯,1998(5).

[67] 肖果能,袁平之.第 39 届 IMO 一道试题的研究(Ⅱ)[J].湖南数学通讯,1998(6).

[68] 杨克昌.一个数列不等式——IMO23－3 的推广[J].湖南数学通讯,1998(3).

[69] 吴长明,胡根宝.一道第 40 届 IMO 试题的探究[J].中学数学研究,2000(6).

[70] 仲翔.第二十六届国际数学奥林匹克(续)[J].数学通讯,1985(11).

[71] 程善明.一道 IMO 赛题的纯几何证法与推广[J].中学数学教学,1998(4).

[72] 刘元树.一道 IMO 试题解法的再探讨[J].中学数学研究,1998(12).

[73] 刘连顺,仝瑞平.一道 IMO 试题解法新探[J].中学数学研究,1998(8).

[74] 王凤春.一道 IMO 试题的简证[J].中学数学研究,1998(10).

[75] 李长明.一道 IMO 试题的背景及证法讨论[J].中学数学教学,2000(1).

[76] 方廷刚.综合法简证一道 IMO 预选题[J].中学生数学,1999(2).

[77] 吴伟朝.对函数方程 $f(x^l \cdot f^{[m]}(y)+x^n)=x^l \cdot y+f^n(x)$ 的研究[M]//湖南教育出版社编.数学竞赛(22).长沙:湖南教育出版社,1994.

[78] 湘普.第 31 届国际数学奥林匹克试题解答[M]//湖南教育出版社编.数学竞赛(6～9).长沙:湖南教育出版社,1991.

[79] 陈永高.第 45 届 IMO 试题解答[J].中等数学,2004(5).

[80] 程俊.一道 IMO 试题的推广及简证[J].中等数学,2004(5).

[81] 蒋茂森.$2k$ 阶银矩阵的存在性和构造法[J].中等数学,1998(3).

[82] 单墫.散步问题与银矩阵[J].中等数学,1999(3).

[83] 张必胜.初等数论在 IMO 中应用研究[D].西安:西北大学研究生院,2010.

[84] 刘宝成,刘卫利.国际奥林匹克数学竞赛题与费马小定理[J].河北北方学院学报:自然科学版,2008,24(1):13-15,20.

[85] 卓成海.抓住“关键”把握“异同”——对一道国际奥赛题的再探究[J].中学数学(高中版),2013(11):77-78.

[86] 李耀文.均值代换在解竞赛题中的应用[J].中等数学,2010(8):2-5.

[87] 吴军.妙用广义权方和不等式证明 IMO 试题[J].数理化解体研究(高中版),2014(8).16.

[88] 王庆金.一道 IMO 平面几何题溯源[J].中学数学研究,2014(1):50.

[89] 秦建华.一道 IMO 试题的另解与探究[J].中学教学参考,2014(8):40.

[90] 张上伟,陈华梅,吴康.一道取整函数 IMO 试题的推广[J].中学数学研究(华南师范大学版),2013(23):42-43

[91] 尹广金.一道美国数学奥林匹克试题的引伸[J].中学数学研究,2013(11):50.

[92] 熊斌,李秋生.第 54 届 IMO 试题解答[J].中等数学,2013(9):20-27.

[93] 杨同伟.一道 IMO 试题的向量解法及推广[J].中学生数学,2012(23):30.

[94] 李凤清,徐志军.第 42 届 IMO 第二题的证明与加强[J] 四川职业技术学院学报,2012(5):153-154.

[95] 熊斌.第 52 届 IMO 试题解答[J].中等数学,2011(9):16-20.

[96] 董志明.多元变量 局部调整——一道 IMO 试题的新解与推广[J].中等数学,

2011(9):96-98.
[97] 李建潮. 一道 IMO 试题的再加强与猜想的加强[J]. 河北理科教学研究,2011(1):43-44.
[98] 边欣. 一道 IMO 试题的加强[J]. 数学通讯,2012(22):59-60.
[99] 郑日锋.一个优美不等式与一道 IMO 试题同出一辙[J] 中等数学,2011(3):18-19.
[100] 李建潮. 一道 IMO 试题的再加强与猜想的加强[J] 河北理科教学研究,2011(1):43-44.
[101] 李长朴. 一道国际数学奥林匹克试题的拓展[J]. 数学学习与研究,2010(23):95.
[102] 李歆. 对一道 IMO 试题的探究[J]. 数学教学,2010(11):47-48.
[103] 王淼生. 对一道 IMO 试题猜想的再加强及证明[J]. 福建中学数学,2010(10):48.
[104] 郝志刚.一道国际数学竞赛题的探究[J]. 数学通讯,2010(Z2):117-118.
[105] 王业和. 一道 IMO 试题的证明与推广[J]. 中学教研(数学),2010(10):46-47.
[106] 张蕾. 一道 IMO 试题的商榷与猜想[J]. 青春岁月,2010(18):121.
[107] 张俊. 一道 IMO 试题的又一漂亮推广[J]. 中学数学月刊,2010(8):43.
[108] 秦庆雄,范花妹. 一道第 42 届 IMO 试题加强的另一简证[J]. 数学通讯,2010(14):59.
[109] 李建潮. 一道 IMO 试题的引申与瓦西列夫不等式[J] 河北理科教学研究,2010(3):1-3.
[110] 边欣. 一道第 46 届 IMO 试题的加强[J]. 数学教学,2010(5):41-43.
[111] 杨万芳. 对一道 IMO 试题的探究[J] 福建中学数学,2010(4):49.
[112] 熊睿. 对一道 IMO 试题的探究[J]. 中等数学,2010(4):23.
[113] 徐国辉,舒红霞. 一道第 42 届 IMO 试题的再加强[J]. 数学通讯,2010(8):61.
[114] 周峻民,郑慧娟. 一道 IMO 试题的证明及其推广[J]. 中学教研(数学),2011(12):41-43.
[115] 陈鸿斌. 一道 IMO 试题的加强与推广[J]. 中学数学研究,2011(11):49-50.
[116] 袁安全. 一道 IMO 试题的巧证[J]. 中学生数学,2010(8):35.
[117] 边欣. 一道第 50 届 IMO 试题的探究[J]. 数学教学,2010(3):10-12.
[118] 陈智国. 关于 IMO25-1 的推广[J]. 人力资源管理,2010(2):112-113.
[119] 薛相林. 一道 IMO 试题的类比拓广及简解[J]. 中学数学研究,2010(1):49.
[120] 王增强. 一道第 42 届 IMO 试题加强的简证[J]. 数学通讯,2010(2):61.
[121] 邵广钱.一道 IMO 试题的另解[J]. 中学数学月刊,2009(10):43-44.
[122] 侯典峰.一道 IMO 试题的加强与推广[J] 中学数学,2009(23):22-23.
[123] 朱华伟,付云皓. 第 50 届 IMO 试题解答[J]. 中等数学,2009(9):18-21.
[124] 边欣. 一道 IMO 试题的推广及简证[J]. 数学教学,2009(9):27,29.
[125] 朱华伟. 第 50 届 IMO 试题[J]. 中等数学,2009(8):50.
[126] 刘凯峰,龚浩生. 一道 IMO 试题的隔离与推广[J]. 中等数学,2009(7):19-20.
[127] 宋庆. 一道第 42 届 IMO 试题的加强[J]. 数学通讯,2009(10):43.
[128] 李建潮. 偶得一道 IMO 试题的指数推广[J]. 数学通讯,2009(10):44.
[129] 吴立宝,李长会. 一道 IMO 竞赛试题的证明[J]. 数学教学通讯,2009(12):64.

[130] 徐章韬. 一道 30 届 IMO 试题的别解[J]. 中学数学杂志,2009(3):45.
[131] 张俊.一道 IMO 试题引发的探索[J]. 数学通讯,2009(4):31.
[132] 曹程锦. 一道第 49 届 IMO 试题的解题分析[J]. 数学通讯,2008(23):41.
[133] 刘松华,孙明辉,刘凯年. “化蝶”——一道 IMO 试题证明的探索[J]. 中学数学杂志,2008(12):54-55.
[134] 安振平.两道数学竞赛试题的链接[J]. 中小学数学(高中版),2008(10):45.
[135] 李建潮. 一道 IMO 试题引发的思索[J]. 中小学数学(高中版),2008(9):44-45.
[136] 熊斌,冯志刚. 第 49 届 IMO 试题解答[J] 中等数学,2008(9):封底.
[137] 边欣.一道 IMO 试题结果的加强及应用[J]. 中学数学月刊,2008(9):29-30.
[138] 熊斌,冯志刚. 第 49 届 IMO 试题[J] 中等数学,2008(8):封底.
[139] 沈毅.一道 IMO 试题的推广[J]. 中学数学月刊,2008(8):49.
[140] 令标.一道 48 届 IMO 试题引申的别证[J]. 中学数学杂志,2008(8):44-45.
[141] 吕建恒.第 48 届 IMO 试题 4 的简证[J]. 中学数学月刊,2008(7):40.
[142] 熊光汉. 对一道 IMO 试题的探究[J]. 中学数学杂志,2008(6):56.
[143] 沈毅,罗元建. 对一道 IMO 赛题的探析[J]. 中学教研(数学),2008(5):42-43
[144] 厉倩.两道 IMO 试题探秘[J] 数理天地(高中版), 2008(4):21-22.
[145] 徐章韬.从方差的角度解析一道 IMO 试题[J]. 中学数学杂志,2008(3):29.
[146] 令标.一道 IMO 试题的别证[J].中学数学教学,2008(2):63-64.
[147] 李耀文.一道 IMO 试题的别证[J]. 中学数学月刊,2008(2):52.
[148] 张伟新.一道 IMO 试题的两种纯几何解法[J]. 中学数学月刊,2007(11):48.
[149] 朱华伟.第 48 届 IMO 试题解答[J]. 中等数学,2007(9):20-22.
[150] 朱华伟.第 48 届 IMO 试题 [J]. 中等数学,2007(8):封底.
[151] 边欣.一道 IMO 试题结果的加强[J]. 数学教学,2007(3):49.
[152] 丁兴春. 一道 IMO 试题的推广[J]. 中学数学研究,2006(10):49-50.
[153] 李胜宏.第 47 届 IMO 试题解答[J].中等数学,2006(9):22-24.
[154] 李胜宏.第 47 届 IMO 试题 [J].中等数学,2006(8):封底.
[155] 傅启铭.一道美国 IMO 试题变形后的推广[J]. 遵义师范学院学报,2006(1):74-75.
[156] 熊斌.第 46 届 IMO 试题[J] 中等数学,2005(8):50.
[157] 文开庭.一道 IMO 赛题的新隔离推广及其应用[J] .毕节师范高等专科学校学报(综合版), 2005(2):59-62.
[158] 熊斌,李建泉. 第 53 届 IMO 预选题(四)[J].中等数学,2013(12):21-25.
[159] 熊斌,李建泉. 第 53 届 IMO 预选题(三)[J].中等数学,2013(11):22-27.
[160] 熊斌,李建泉. 第 53 届 IMO 预选题(二)[J].中等数学,2013(10):18-23
[161] 熊斌,李建泉. 第 53 届 IMO 预选题(一)[J].中等数学,2013(9):28-32.
[162] 王建荣,王旭. 简证一道 IMO 预选题[J].中等数学,2012(2):16-17.
[163] 熊斌,李建泉. 第 52 届 IMO 预选题(四) [J].中等数学,2012(12):18-22.
[164] 熊斌,李建泉. 第 52 届 IMO 预选题(三) [J].中等数学,2012(11):18-22.
[165] 李建泉. 第 51 届 IMO 预选题(四) [J].中等数学,2011(11):17-20.
[166] 李建泉. 第 51 届 IMO 预选题(三) [J].中等数学,2011(10):16-19.

[167] 李建泉. 第 51 届 IMO 预选题(二) [J]. 中等数学,2011(9):20-27.
[168] 李建泉. 第 51 届 IMO 预选题(一) [J]. 中等数学,2011(8):17-20.
[169] 高凯. 浅析一道 IMO 预选题[J]. 中等数学,2011(3):16-18.
[170] 娄姗姗. 利用等价形式证明一道 IMO 预选题[J]. 中等数学,2011(1):13,封底.
[171] 李奋平. 从最小数入手证明一道 IMO 预选题[J]. 中等数学,2011(1):14.
[172] 李赛. 一道 IMO 预选题的另证[J]. 中等数学,2011(1):15.
[173] 李建泉. 第 50 届 IMO 预选题(四) [J]. 中等数学,2010(11):19-22.
[174] 李建泉. 第 50 届 IMO 预选题(三) [J]. 中等数学,2010(10):19-22.
[175] 李建泉. 第 50 届 IMO 预选题(二) [J]. 中等数学,2010(9):21-27.
[176] 李建泉. 第 50 届 IMO 预选题(一) [J]. 中等数学,2010(8):19-22.
[177] 沈毅. 一道 49 届 IMO 预选题的推广[J]. 中学数学月刊,2010(04):45.
[178] 宋强. 一道第 47 届 IMO 预选题的简证[J]. 中等数学,2009(11):12.
[179] 李建泉. 第 49 届 IMO 预选题(四) [J]. 中等数学,2009(11):19-23.
[180] 李建泉. 第 49 届 IMO 预选题(三) [J]. 中等数学,2009(10):19-23.
[181] 李建泉. 第 49 届 IMO 预选题(二) [J]. 中等数学,2009(9):22-25.
[182] 李建泉. 第 49 届 IMO 预选题(一) [J]. 中等数学,2009(8):18-22.
[183] 李慧,郭璋. 一道 IMO 预选题的证明与推广[J]. 数学通讯,2009(22):45-47.
[184] 杨学枝. 一道 IMO 预选题的拓展与推广[J]. 中等数学,2009(7):18-19.
[185] 吴光耀,李世杰. 一道 IMO 预选题的推广[J]. 上海中学数学,2009(05):48.
[186] 李建泉. 第 48 届 IMO 预选题(四) [J]. 中等数学,2008(11):18-24.
[187] 李建泉. 第 48 届 IMO 预选题(三) [J]. 中等数学,2008(10):18-23.
[188] 李建泉. 第 48 届 IMO 预选题(二) [J]. 中等数学,2008(9):21-24.
[189] 李建泉. 第 48 届 IMO 预选题(一) [J]. 中等数学,2008(8):22-26.
[190] 苏化明. 一道 IMO 预选题的探讨[J]. 中等数学,2007(9):46-48.
[191] 李建泉. 第 47 届 IMO 预选题(下) [J]. 中等数学,2007(11):17-22.
[192] 李建泉. 第 47 届 IMO 预选题(中) [J]. 中等数学,2007(10):18-23.
[193] 李建泉. 第 47 届 IMO 预选题(上) [J]. 中等数学,2007(9):24-27.
[194] 沈毅. 一道 IMO 预选题的再探索[J]. 中学数学教学,2008(1):58-60.
[195] 刘才华. 一道 IMO 预选题的简证[J]. 中等数学,2007(8):24.
[196] 苏化明. 一道 IMO 预选题的探讨[J]. 中等数学,2007(9):19-20.
[197] 李建泉. 第 46 届 IMO 预选题(下) [J]. 中等数学,2006(11):19-24.
[198] 李建泉. 第 46 届 IMO 预选题(中) [J]. 中等数学,2006(10):22-25.
[199] 李建泉. 第 46 届 IMO 预选题(上) [J]. 中等数学,2006(9):25-28.
[200] 贯福春. 吴娃双舞醉芙蓉——一道 IMO 预选题赏析[J]. 中学生数学,2006(18):21,18.
[201] 杨学枝. 一道 IMO 预选题的推广[J]. 中等数学,2006(5):17.
[202] 邹宇,沈文选. 一道 IMO 预选题的再推广[J]. 中学数学研究,2006(4):49-50.
[203] 苏炜杰. 一道 IMO 预选题的简证[J]. 中等数学,2006(2):21.
[204] 李建泉. 第 45 届 IMO 预选题(下) [J]. 中等数学,2005(11):28-30.

[205] 李建泉. 第 45 届 IMO 预选题(中) [J]. 中等数学,2005(10):32-36.
[206] 李建泉. 第 45 届 IMO 预选题(上) [J]. 中等数学,2005(9):23-29.
[207] 苏化明. 一道 IMO 预选题的探索[J]. 中等数学,2005(9):9-10.
[208] 谷焕春,周金峰. 一道 IMO 预选题的推广[J]. 中等数学,2005(2):20.
[209] 李建泉. 第 44 届 IMO 预选题(下) [J]. 中等数学,2004(6):25-30.
[210] 李建泉. 第 44 届 IMO 预选题(上) [J]. 中等数学,2004(5):27-32.
[211] 方廷刚. 复数法简证一道 IMO 预选题[J]. 中学数学月刊,2004(11):42.
[212] 李建泉. 第 43 届 IMO 预选题(下) [J]. 中等数学,2003(6):28-30.
[213] 李建泉. 第 43 届 IMO 预选题(上) [J]. 中等数学,2003(5):25-31.
[214] 孙毅. 一道 IMO 预选题的简解[J]. 中等数学,2003(5):19.
[215] 宿晓阳. 一道 IMO 预选题的推广[J]. 中学数学月刊,2002(12):40.
[216] 李建泉. 第 42 届 IMO 预选题(下) [J]. 中等数学,2002(6):32-36.
[217] 李建泉. 第 42 届 IMO 预选题(上) [J]. 中等数学,2002(5):24-29.
[218] 宋庆,黄伟民. 一道 IMO 预选题的推广[J]. 中等数学,2002(6):43.
[219] 李建泉. 第 41 届 IMO 预选题(下) [J]. 中等数学,2002(1):33-39.
[220] 李建泉. 第 41 届 IMO 预选题(中) [J]. 中等数学,2001(6):34-37.
[221] 李建泉. 第 41 届 IMO 预选题(上) [J]. 中等数学,2001(5):32-36.
[222] 方廷刚. 一道 IMO 预选题再解[J]. 中学数学月刊,2002(05):43.
[223] 蒋太煌. 第 39 届 IMO 预选题 8 的简证[J]. 中等数学,2001(5):22-23.
[224] 张赟. 一道 IMO 预选题的推广[J]. 中等数学,2001(2):26.
[225] 林运成. 第 39 届 IMO 预选题 8 别证[J]. 中等数学,2001(1):22.
[226] 李建泉. 第 40 届 IMO 预选题(上) [J]. 中等数学,2000(5):33-36.
[227] 李建泉. 第 40 届 IMO 预选题(中) [J]. 中等数学,2000(6):35-37.
[228] 李建泉. 第 41 届 IMO 预选题(下) [J]. 中等数学,2001(1):35-39.
[229] 李来敏. 一道 IMO 预选题的三种初等证法及推广[J]. 中学数学教学,2000(3):38-39.
[230] 李来敏. 一道 IMO 预选题的两种证法[J]. 中学数学月刊,2000(3):48.
[231] 张善立. 一道 IMO 预选题的指数推广[J]. 中等数学,1999(5):24.
[232] 云保奇. 一道 IMO 预选题的另一个结论[J]. 中等数学,1999(4):21.
[233] 辛慧. 第 38 届 IMO 预选题解答(上) [J]. 中等数学,1998(5):28-31.
[234] 李直. 第 38 届 IMO 预选题解答(中) [J]. 中等数学,1998(6):31-35.
[235] 冼声. 第 38 届 IMO 预选题解答(中) [J]. 中等数学,1999(1):32-38.
[236] 石卫国. 一道 IMO 预选题的推广[J]. 陕西教育学院学报,1998(4): 72-73.
[237] 张赟. 一道 IMO 预选题的引申[J]. 中等数学,1998(3):22-23.
[238] 安金鹏,李宝毅. 第 37 届 IMO 预选题及解答(上) [J]. 中等数学,1997(6): 33-37.
[239] 安金鹏,李宝毅. 第 37 届 IMO 预选题及解答(下) [J]. 中等数学,1998(1): 34-40.
[240] 刘江枫,李学武. 第 37 届 IMO 预选题[J]. 中等数学,1997(5): 30-32.
[241] 党庆寿. 一道 IMO 预选题的简解[J]. 中学数学月刊,1997(8):43-44.
[242] 黄汉生. 一道 IMO 预选题的加强[J]. 中等数学,1997(3):17.

[243] 贝嘉禄.一道国际竞赛预选题的加强[J].中学数学月刊,1997(6):26-27.
[244] 王富英. 一道 IMO 预选题的推广及其应用[J].中学数学教学参,1997(8～9):74-75.
[245] 孙哲. 一道 IMO 预选题的简证与加强[J].中等数学,1996(3):18.
[246] 李学武.第 36 届 IMO 预选题及解答(下)[J].中等数学,1996(6):26-29,37.
[247] 张善立.一道 IMO 预选题的简证[J].中等数学,1996(10):36.
[248] 李建泉. 利用根轴的性质解一道 IMO 预选题[J].中等数学,1996(4):14.
[249] 黄虎. 一道 IMO 预选题妙解及推广[J].中等数学,1996(4):15.
[250] 严鹏. 一道 IMO 预选题探讨[J].中等数学,1996(2):16.
[251] 杨桂芝. 第 34 届 IMO 预选题解答(上)[J].中等数学,1995(6):28-31.
[252] 杨桂芝. 第 34 届 IMO 预选题解答(中)[J].中等数学,1996(1):29-31.
[253] 杨桂芝. 第 34 届 IMO 预选题解答(下)[J].中等数学,1996(2):21-23.
[254] 舒金银.一道 IMO 预选题简证[J].中等数学,1995(1):16-17.
[255] 黄宣国,夏兴国.第 35 届 IMO 预选题[J].中等数学,1994(5):19-20.
[256] 苏淳,严镇军. 第 33 届 IMO 预选题[J].中等数学,1993(2):19-20.
[257] 耿立顺.一道 IMO 预选题的简单解法[J].中学教研,1992(05):26.
[258] 苏化明.谈一道 IMO 预选题[J].中学教研,1992(05):28-30.
[259] 黄玉民.第 32 届 IMO 预选题及解答[J].中等数学,1992(1):22-34.
[260] 朱华伟.一道 IMO 预选题的溯源及推广[J].中学数学,1991(03):45-46.
[261] 蔡玉书.一道 IMO 预选题的推广[J].中等数学,1990(6):9.
[262] 第 31 届 IMO 选题委员会. 第 31 届 IMO 预选题解答[J].中等数学,1990(5):7-22,封底.
[263] 单墫,刘亚强. 第 30 届 IMO 预选题解答[J].中等数学,1989(5):6-17.
[264] 苏化明.一道 IMO 预选题的推广及应用[J].中等数学,1989(4):16-19.

后记 | Postscript

行为的背后是动机，编一部洋洋80万言的书一定要有很强的动机才行，借后记不妨和盘托出.

首先，这是一本源于“匮乏”的书.1976年编者初中一年级，时值“文化大革命”刚刚结束，物质产品与精神产品极度匮乏，学校里薄薄的数学教科书只有几个极简单的习题，根本满足不了学习的需要.当时全国书荒，偌大的书店无书可寻，学生无题可做，在这种情况下，笔者的班主任郭清泉老师便组织学生自编习题集.如果说忠诚党的教育事业不仅仅是一个口号的话，那么郭老师确实做到了.在其个人生活极为困顿的岁月里，他拿出多年珍藏的数学课外书领着一批初中学生开始选题、刻钢板、推油辊.很快一本本散发着油墨清香的习题集便发到了每个同学的手中，喜悦之情难以名状，正如高尔基所说：“像饥饿的人扑到了面包上.”当时电力紧张经常停电，晚上写作业时常点蜡烛，冬夜，烛光如豆，寒气逼人，伏案演算着自己编的数学题，沉醉其中，物我两忘.30年后同样的冬夜，灯光如昼，温暖如夏，坐拥书城，竟茫然不知所措，此时方觉匮乏原来也是一种美(想想西南联大当时在山洞里、在防空洞中，学数学学成了多少大师级人物.日本战后恢复期产生了三位物理学诺贝尔奖获得者，如汤川秀树等，以及高木贞治、小平邦彦、广中平佑的成长都证明了这一点)，可惜现在的学生永远也体验不到那种意境了(中国人也许是世界上最讲究意境的，所谓“雪夜闭门读禁书”，也是一种意境)，所以编此书颇有怀旧之感.有趣的是后来这次经历竟在笔者身上产生了“异

化”，抄习题的乐趣多于做习题，比为买椟还珠不以为过，四处收集含有习题的数学著作，从吉米多维奇到菲赫金哥尔茨，从斯米尔诺夫到维诺格拉朵夫，从笹部贞市郎到哈尔莫斯，乐此不疲.凡30年几近偏执，朋友戏称：“这是一种不需治疗的精神病.”虽然如此，毕竟染此“病症”后容易忽视生活中那些原本的乐趣.这有些像葛朗台用金币碰撞的叮当声取代了花金币的真实快感一样.匮乏带给人的除了美感之外，更多的是恐惧.中国科学院数学研究所数论室主任徐广善先生来哈尔滨工业大学讲课，课余时曾透露过陈景润先生生前的一个小秘密(曹珍富教授转述，编者未加核实).陈先生的一只抽屉中存有多只快生锈的上海牌手表.这个不可思议的现象源于当年陈先生所经历过的可怕的匮乏.大学刚毕业，分到北京四中，后被迫离开，衣食无着，生活窘迫，后虽好转，但那次经历给陈先生留下了深刻记忆，为防止以后再次陷于匮乏，就买了当时陈先生认为在中国最能保值增值的上海牌手表，以备不测.像经历过饥饿的田鼠会疯狂地往洞里搬运食物一样，经历过如饥似渴却无题可做的编者在潜意识中总是觉得题少，只有手中有大量习题集，心里才觉安稳.所以很多时候表面看是一种热爱，但更深层次却是恐惧，是缺少富足感的体现.

其次，这是一本源于“传承”的书.哈尔滨作为全国解放最早的城市，开展数学竞赛活动也是很早的，早期哈尔滨工业大学的吴从炘教授、黑龙江大学的颜秉海教授、船舶工程学院(现哈尔滨工程大学)的戴遗山教授、哈尔滨师范大学的吕庆祝教授作为先行者为哈尔滨的数学竞赛活动打下了基础，定下了格调.中期哈尔滨市教育学院王翠满教授、王万祥教授、时承权教授，哈尔滨师专的冯宝琦教授、陆子采教授，哈尔滨师范大学的贾广聚教授，黑龙江大学的王路群教授、曹重光教授，哈三中的周建成老师，哈一中的尚杰老师，哈师大附中的沙洪泽校长，哈六中的董乃培老师，为此作出了长期的努力.上世纪80年代中期开始，一批中青年数学工作者开始加入，主要有哈尔滨工业大学的曹珍富教授、哈师大附中的李修福老师及笔者.90年代中期，哈尔滨的数学奥林匹克活动渐入佳境，又有像哈师大附中刘利益等老师加入进来，但在高等学校中由于搞数学竞赛研究既不算科研又不计入工作量，所以再坚持难免会被边缘化，于是研究人员逐渐以中学教师为主，在高校中近乎绝迹.2008年CMO在哈尔滨举行，大型专业杂志《数学奥林匹克与数学文化》创刊，好戏连台，让哈尔滨的数学竞赛事业再度辉煌.

第三，这是一本源于“氛围”的书．很难想像速滑运动员产生于非洲，也无法相信深山古刹之外会有高僧．环境与氛围至关重要．在整个社会日益功利化、世俗化、利益化、平面化的大背景下，编者师友们所营造的小的氛围影响着其中每个人的道路选择，以学有专长为荣，不学无术为耻的价值观点互相感染、共同坚守，用韩波博士的话讲，这已是我们这台计算机上的硬件．赖于此，本书的出炉便在情理之中，所以理应致以敬意，借此向王忠玉博士、张本祥博士、郭梦书博士、吕书臣博士、康大臣博士、刘孝廷博士、刘晓燕博士、王延青博士、钟德寿博士、薛小平博士、韩波博士、李龙锁博士、刘绍武博士对笔者多年的关心与鼓励致以诚挚的谢意，特别是尚琥教授在编者即将放弃之际给予的坚定的支持．

第四，这是一个“蝴蝶效应”的产物．如果说人的成长过程具有一点动力系统迭代的特征的话，那么其方程一定是非线性的，即对初始条件具有敏感依赖的，俗称“蝴蝶效应”．简单说就是一个微小的“扰动”会改变人生的轨迹，如著名拓扑学家，纽结大师王诗宬 1977 年时还是一个喜欢中国文学史的插队知青，一次他到北京去游玩，坐 332 路车去颐和园，看见“北京大学”四个字，就跳下车进入校门，当时他的脑子中正在想一个简单的数学问题（大多数时候他都是在推敲几句诗），就是六个人的聚会上总有三个人认识或三个人不认识（用数学术语说就是 6 阶 2 色完全图中必有单色 3 阶子图存在），然后碰到一个老师，就问他，他说你去问姜伯驹老师（我国著名数学家姜亮夫之子），姜伯驹老师的办公室就在我办公室对面．而当他找到姜伯驹教授时，姜伯驹说为什么不来试试学数学，于是一句话，一辈子，有了今天北京大学数学所的王诗宬副所长（《世纪大讲堂》，第 2 辑，辽宁人民出版社，2003：128—149）．可以设想假如他遇到的是季羡林或俞平伯，今天该会是怎样．同样可以设想，如果编者初中的班主任老师是一位体育老师，足球健将的话，那么今天可能会多一位超级球迷“罗西”，少一位执着的业余数学爱好者，也绝不会有本书的出现．

第五，这也是一本源于“尴尬”的书．编者高中就读于一所具有数学竞赛传统的学校，班主任是学校主抓数学竞赛的沙洪泽老师．当时成立数学兴趣小组时，同学们非常踊跃，但名额有限，可能是沙老师早已发现编者并无数学天分所以不被选中，再次申请并请姐姐（在同校高二年级）去求情均未果．遂产生逆反心理，后来坚持以数学谋生，果真由于天资不足，屡战屡败，虽自我鼓励，屡败再屡战，但其结果仍如寒山子诗所说：“用力磨碌砖，那堪将作镜．”直至而立之年，幡然悔悟，但

"贼船"既上,回头已晚,彻底告别又心有不甘,于是以业余身份尴尬地游走于业界近15年,才有今天此书问世.

看来如果当初沙老师增加一个名额让编者尝试一下,后再知难而退,结果可能会皆大欢喜.但有趣的是当年竞赛小组的人竟无一人学数学专业,也无一人从事数学工作.看来教育是很值得研究的,"欲擒故纵"也不失为一种好方法.沙老师后来也放弃了数学教学工作,从事领导工作,转而研究教育,颇有所得,还出版了专著《教育——为了人的幸福》(教育科学出版社,2005),对此进行了深入研究.

最后,这也是一本源于"信心"的书.近几年,一些媒体为了吸引眼球,不惜把中国在国际上处于领先地位的数学奥林匹克妖魔化且多方打压,此时编写这本题集是有一定经济风险的.但编者坚信中国人对数学是热爱的.利玛窦、金尼阁指出:"多少世纪以来,上帝表现了不只用一种方法把人们吸引到他身边.垂钓人类的渔人以自己特殊的方法吸引人们的灵魂落入他的网中,也就不足为奇了.任何可能认为伦理学、物理学和数学在教会工作中并不重要的人,都是不知道中国人的口味的,他们缓慢地服用有益的精神药物,除非它有知识的佐料增添味道."(利玛窦,金尼阁,著.《利玛窦中国札记》.何高济,王遵仲,李申,译.何兆武,校.中华书局,1983,P347).中国的广大中学生对数学竞赛活动是热爱的,是能够被数学所吸引的,对此我们有充分的信心.而且,奥林匹克之于中国就像围棋之于日本,足球之于巴西,瑜伽之于印度一样,在世界上有品牌优势.2001年笔者去新西兰探亲,在奥克兰的一份中文报纸上看到一则广告,赫然写着中国内地教练专教奥数,打电话过去询问,对方声音甜美,颇富乐感,原来是毕业于沈阳音乐学院的女学生,在新西兰找工作四处碰壁后,想起在大学念书期间勤工俭学时曾辅导过小学生奥数,所以,便想一试身手,果真有家长把小孩送来,她便也以教练自居,可见数学奥林匹克已经成为一种类似于中国制造的品牌.出版这样的书,担心何来呢!

数学无国界,它是人类最共性的语言.数学超理性多呈冰冷状,所以一个个性化的,充满个体真情实感的后记是需要的,虽然难免有自恋之嫌,但毕竟带来一丝人气.

刘培杰

2014 年 9 月

［General Information］
书名＝IMO 50年 第10卷 2005-2009
作者＝佩捷主编
页数＝314
SS号＝14072317
DX号＝
出版日期＝2016.01
出版社＝哈尔滨工业大学出版社